物理学Ｉ（力学）
2 回目：位置・速度・加速度

中野武雄
2012年4月17日

今日の内容

- 物体の運動について
  - 質点の仮定
- 運動の表現：1次元
  - 時間の関数としての位置（座標）
  - 速度：位置の微分
  - 加速度：速度の微分
- 運動の表現：2次元への導入
  - 位置座標のベクトル表現・成分表現
  - 速度ベクトル・加速度ベクトル

物体の運動と質点

- 現実の「物体」の運動
  1. 並進運動（3次元）
  2. 回転運動（3軸）
  3. 変形（さらに多くの次元）
- 剛体：3 を無視したもの
- 質点：さらに 2 も無視したもの
  - 考えている系（system）に比べて十分小さい
  - 回転運動のエネルギーが不変 (or 微小)

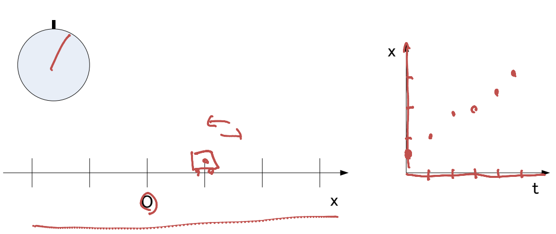
$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \text{const.} \quad \text{or} \quad \frac{1}{2}I\omega^2 << \frac{1}{2}mv^2$$

質点の運動：1次元

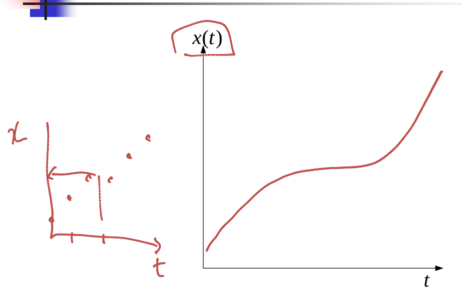
- 次元：ものごとの「状態」を定めるのに、何個の数字が必要か
- ひとつの数字で位置が決定できる→1次元空間
- とりあえず、原点を持ち、等間隔に目盛が振ってある直線座標を考える
- 時間の基準となる時計も導入

時間の関数としての位置座標

- 時間を指定したら、その時間における位置が決まる→関数



位置ー時間グラフ



速度＝移動距離/移動時間

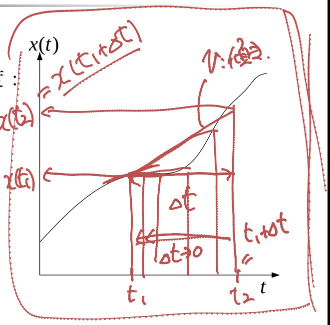
t_1 から t_2 までの平均速度：

$$\bar{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$t_2 - t_1 = \Delta t \Leftrightarrow t_2 = t_1 + \Delta t$

と置けば、

$$\bar{v} = \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t}$$



「瞬間」の速度

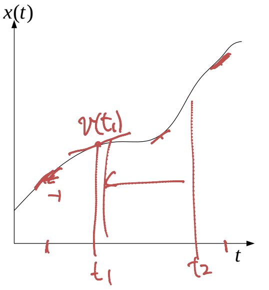
$$v(t_1) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t}$$

$t_1 \to t$ と置きかえ：

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{dx(t)}{dt} \quad \frac{d}{dt}(x(t))$$

($x'(t)$ とか $\dot{x}(t)$ とも書く)



微分：「引いて割る」

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

いくつかの重要な例： $f(t) = t^2$ $\quad f(t+\Delta t) = (t+\Delta t)^2$

$$\frac{d}{dt}(t^2) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}(2t + \Delta t) = 2t$$

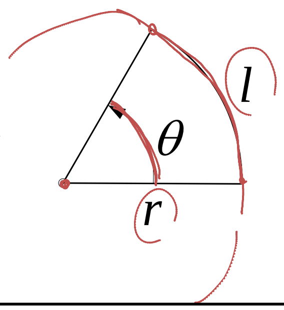
$$\frac{d}{dt}(t^3) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(t+\Delta t)^3 - t^3}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(3t^2 + 3t\Delta t + (\Delta t)^2\right) = 3t^2$$

$$\frac{d}{dt}\sin t = \cos t, \quad \frac{d}{dt}\cos t = -\sin t, \quad \frac{d}{dt}\exp t = \exp t$$

e^t

弧度法：ラジアン（rad）

- $\theta = \dfrac{l}{r}$ で定義
- 2π rad = 360°
- sin、cos 関数の微分の関係が利用できるのは、弧度法のとき



微分の重要な公式

$$\frac{d}{dt}(af(t)) = af'(t) \quad (a\text{は}t\text{によらない定数})$$

$$\frac{d}{dt}(f(t) + g(t)) = f'(t) + g'(t)$$

$$\frac{d}{dt}(f(t) \cdot g(t)) = f(t) \cdot g'(t) + f'(t) \cdot g(t)$$

$$\frac{d}{dt}(f(g(t))) = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dt} = f'(g(t))g'(t)$$

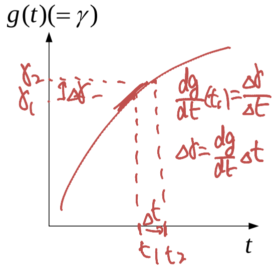
合成関数

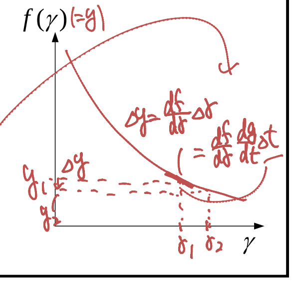
$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(f(at)) = af'(at)$$

合成関数の微分

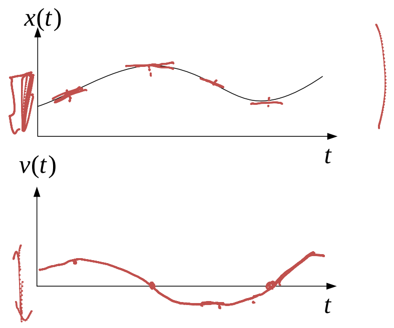
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \to \frac{df}{dg}\frac{dg}{dt}$$

$y = f(g(t))$ で例えば $\gamma = g(t)$ と置けば…





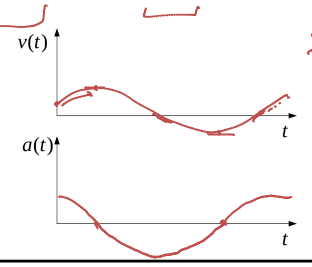
速度：位置の時間微分



加速度：速度の時間微分

$$a(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)=\frac{d^2x(t)}{dt^2}\quad (x''(t)\text{とか}\ \ddot{x}\ \text{とも書く})$$

$\ddot{x}$



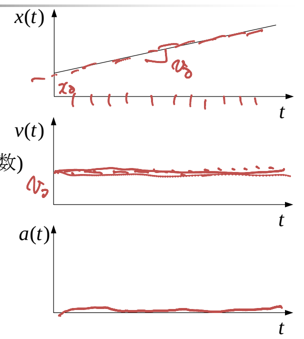
等速運動

$x(t)=x_0+v_0t$

(x_0、v_0 は時間によらない定数)

$v(t)=v_0$

$a(t)=0$

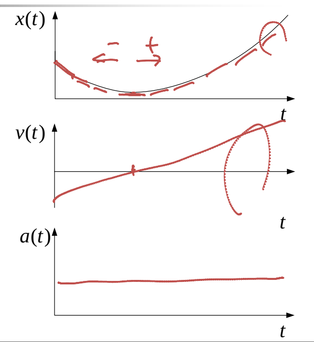


等加速度運動

$x(t)=x_0+v_0t+\frac{1}{2}a_0t^2$

$v(t)=$

$a(t)=a_0$

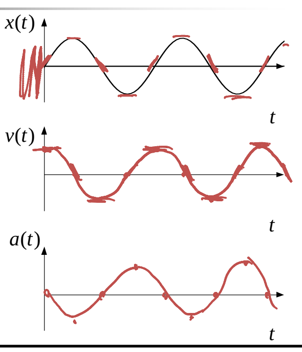


単振動

$x(t)=A\sin\omega t$

$v(t)=\omega A\cos\omega t$

$a(t)=-\omega^2A\sin\omega t$



（今のところは）余談：積分→「かけて足す」

- 微分の逆演算
  - 加速度から速度を得る
  - 速度から位置を得る
- 「積分定数」ぶんの不定性→「初期値」が必要

$$\frac{dF(t)}{dt}=f(t)\Leftrightarrow F(t)=\int_a^t f(\tau)d\tau+C$$

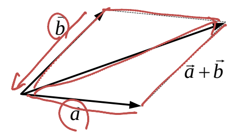
$$\int_a^t f(\tau)d\tau=\lim_{\Delta t\to 0}\sum_{i=1}^{N}f(a+i\Delta t)\Delta t\quad (\text{ただし}\ N\Delta t=t-a)$$

2次元座標

- 位置を定めるのに2つの数字が必要
  - 囲碁・将棋の桝目
  - 地球上の位置：緯度・経度
  - 「成分」という
- 物理学でよく用いる2次元座標系
  - デカルト座標（直交座標）
  - 極座標

ベクトル

- 大きさ・方向・向きを持つ
- 「スカラー倍」が定義されている
- 「2つのベクトルの合成（和）」が平行四辺形の原理によって定義される。「分解」もできる。



交換則：$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

結合則：$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

分配則：$k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

$\vec{a}-\vec{b}$　$\vec{a}+(-\vec{b})$

位置ベクトル・速度ベクトル・加速度ベクトル

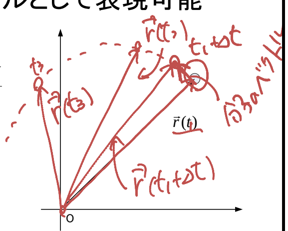
- 位置：ある基準点（原点）から、注目している質点までのベクトルとして表現可能

速度ベクトル：

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

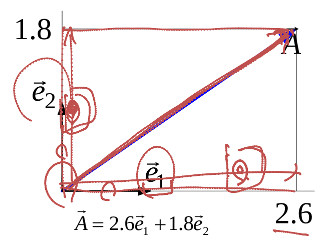
加速度ベクトル：

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$



ベクトルの成分表示

- 「基準ベクトル」を用いる
  - 直交している
  - 大きさは 1
- ベクトルの大きさが三平方の定理から計算できる



$$\vec{A}=2.6\vec{e}_1+1.8\vec{e}_2$$

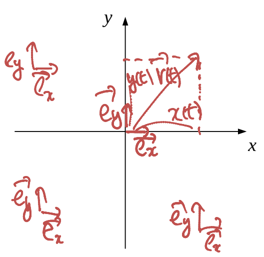
$$\to(2.6,1.8)$$

$$|\vec{A}|=\sqrt{2.6^2+1.8^2}=3.2$$

デカルト座標

$\vec{r}(t)=x(t)\vec{e_x}+y(t)\vec{e_y}$

- 直交座標
- 基準ベクトルが空間のどこでも一様
- ベクトルの和・差が、成分ごとの和・差によって処理できる
  →微分計算も成分ごとに実行可能



2次元デカルト座標での速度・加速度の成分表示

位置ベクトル

$$\vec{r}(t)=x(t)\vec{e}_x+y(t)\vec{e}_y\Rightarrow(x(t),y(t))$$

$\vec{r}(t+\Delta t)=x(t+\Delta t)\vec{e_x}+y(t+\Delta t)\vec{e_y}$

速度ベクトル

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\underbrace{\boxed{\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}}}_{v_x}\vec{e}_x+\underbrace{\boxed{\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}}}_{v_y}\vec{e}_y\right\}\Rightarrow\left(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt}\right)$$

または (v_x,v_y)

$\vec{v}=v_x\vec{e_x}+v_y\vec{e_y}$

加速度ベクトル

$$\left(\frac{dv_x}{dt},\frac{dv_y}{dt}\right)=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2}\right)\text{ または }(a_x,a_y)$$