

## 物理学 I (力学)

### 2 回目: 位置・速度・加速度

中野武雄

2012年4月17日

## 今日の内容

- 物体の運動について
  - 質点の仮定
- 運動の表現: 1次元
  - 時間の関数としての位置(座標)
  - 速度: 位置の微分
  - 加速度: 速度の微分
- 運動の表現: 2次元への導入
  - 位置座標のベクトル表現・成分表現
  - 速度ベクトル・加速度ベクトル

## 物体の運動と質点

- 現実の「物体」の運動
  1. 並進運動(3次元)
  2. 回転運動(3軸)
  3. 変形(さらに多くの次元)
- 剛体: 3 を無視したもの
- 質点: さらに 2 も無視したもの
  - 考えている系(system)に比べて十分小さい
  - 回転運動のエネルギーが不変 (or 微小)

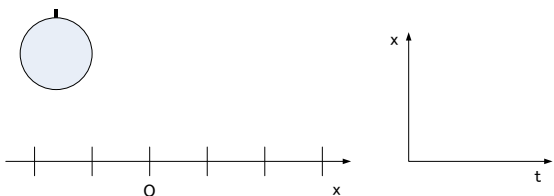
$$\frac{1}{2}I\omega^2 = \text{const.} \quad \text{or} \quad \frac{1}{2}I\omega^2 \ll \frac{1}{2}mv^2$$

## 質点の運動: 1次元

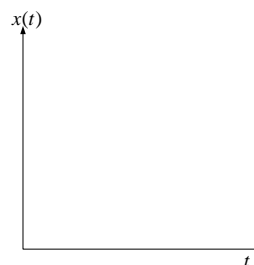
- 次元: ものごとの「状態」を定めるのに、何個の数字が必要か
- ひとつの数字で位置が決定できる  
→ 1次元空間
- とりあえず、原点を持ち、等間隔に目盛が振ってある直線座標を考える
- 時間の基準となる時計も導入

## 時間の関数としての位置座標

- 時間を指定したら、その時間における位置が決まる → 関数



## 位置-時間グラフ



## 速度=移動距離/移動時間

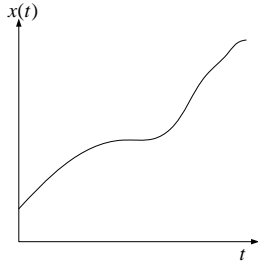
$t_1$  から  $t_2$  までの平均速度:

$$\bar{v} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$$t_2 - t_1 = \Delta t \Leftrightarrow t_2 = t_1 + \Delta t$$

と置けば、

$$\bar{v} = \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t}$$



## 「瞬間」の速度

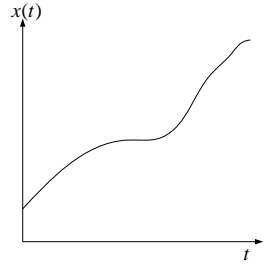
$$v(t_1) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_1 + \Delta t) - x(t_1)}{\Delta t}$$

$t_1 \rightarrow t$  と置きかえ:

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{dx(t)}{dt}$$

( $x'(t)$  とか  $\dot{x}(t)$  とも書く)



## 微分:「引いて割る」

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

いくつかの重要な例:

$$\frac{d}{dt}(t^2) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2t + \Delta t) = 2t$$

$$\frac{d}{dt}(t^3) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(t + \Delta t)^3 - t^3}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (3t^2 + 3t\Delta t + (\Delta t)^2) = 3t^2$$

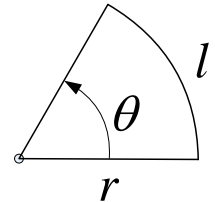
$$\frac{d}{dt} \sin t = \cos t, \quad \frac{d}{dt} \cos t = -\sin t, \quad \frac{d}{dt} \exp t = \exp t$$

## 弧度法:ラジアン(rad)

- $\theta = \frac{l}{r}$  で定義

- $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$

- sin, cos 関数の微分  
の関係が利用できる  
のは、弧度法のと



## 微分の重要な公式

$$\frac{d}{dt}(af(t)) = af'(t) \quad (a \text{ は } t \text{ によらない定数})$$

$$\frac{d}{dt}(f(t) + g(t)) = f'(t) + g'(t)$$

$$\frac{d}{dt}(f(t) \cdot g(t)) = f(t) \cdot g'(t) + f'(t) \cdot g(t)$$

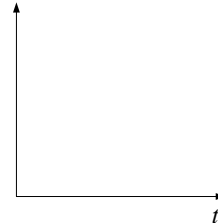
$$\frac{d}{dt}(f(g(t))) = \frac{df}{dg} \cdot \frac{dg}{dt} = f'(g(t))g'(t)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(f(at)) = af'(at)$$

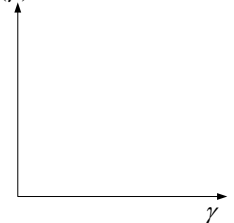
## 合成関数の微分

$f(g(t))$  で例えば  $\gamma = g(t)$  と置けば...

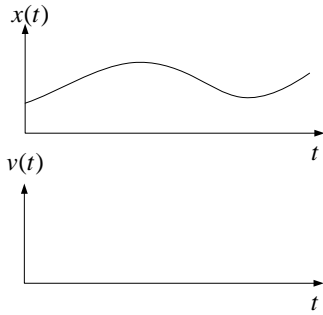
$$g(t) (= \gamma)$$



$$f(\gamma)$$

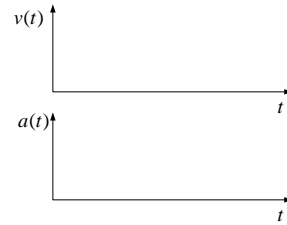


## 速度:位置の時間微分



## 加速度:速度の時間微分

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx(t)}{dt} \right) = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (x''(t) \text{とか} \ddot{x} \text{とも書く})$$



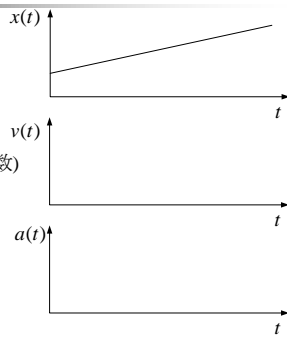
## 等速運動

$$x(t) = x_0 + v_0 t$$

$(x_0, v_0 \text{ は時間によらない定数})$

$$v(t) = v_0$$

$$a(t) = 0$$

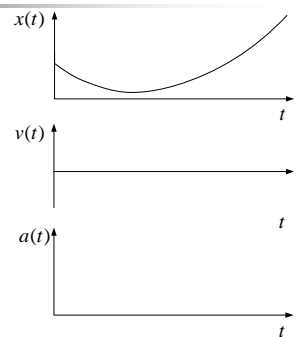


## 等加速度運動

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

$$v(t) = v_0 + a_0 t$$

$$a(t) = a_0$$

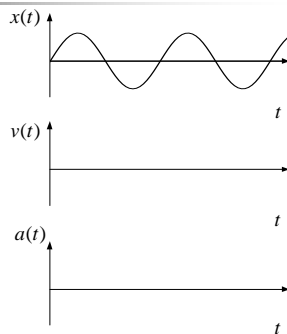


## 単振動

$$x(t) = A \sin \omega t$$

$$v(t) = \omega A \cos \omega t$$

$$a(t) = -\omega^2 A \sin \omega t$$



## (今のところは)余談: 積分→「かけて足す」

- 微分の逆演算
  - 加速度から速度を得る
  - 速度から位置を得る
- 「積分定数」ぶんの不定性→「初期値」が必要

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t) \Leftrightarrow F(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau + C$$

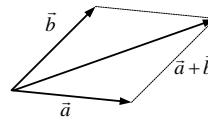
$$\int_a^t f(\tau) d\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N f(a + i\Delta t) \Delta t \quad (\text{ただし } N\Delta t = t - a)$$

## 2次元座標

- 位置を定めるのに2つの数字が必要
  - 囲碁・将棋の樹目
  - 地球上の位置: 緯度・経度
  - 「成分」という
- 物理学でよく用いる2次元座標系
  - デカルト座標(直交座標)
  - 極座標

## ベクトル

- 大きさ・方向・向きを持つ
- 「スカラー倍」が定義されている
- 「2つのベクトルの合成(和)」が平行四辺形の原理によって定義される。「分解」もできる。



交換則:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

結合則:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$

分配則:  $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$

## 位置ベクトル・速度ベクトル・ 加速度ベクトル

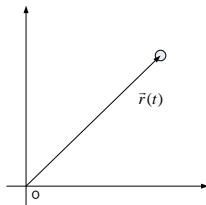
- 位置: ある基準点(原点)から、注目している質点までのベクトルとして表現可能

速度ベクトル:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

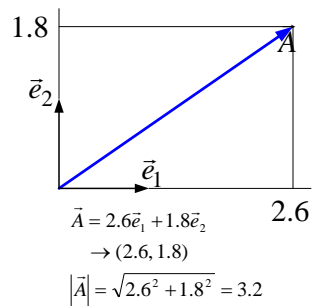
加速度ベクトル:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \\ &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \end{aligned}$$



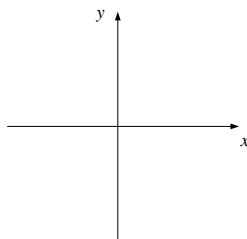
## ベクトルの成分表示

- 「基準ベクトル」を用いる
  - 直交している
  - 大きさは1
- ベクトルの大きさが三平方の定理から計算できる



## デカルト座標

- 直交座標
- 基準ベクトルが空間のどこでも同様
- ベクトルの和・差が、成分ごとの和・差によって処理できる  
→ 微分計算も成分ごとに実行可能



## 2次元デカルト座標での 速度・加速度の成分表示

位置ベクトル

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y \Rightarrow (x(t), y(t))$$

速度ベクトル

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left\{ \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \vec{e}_x + \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t} \vec{e}_y \right\} \Rightarrow \left( \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \end{aligned}$$

または  $(v_x, v_y)$

加速度ベクトル

$$\left( \frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt} \right) = \left( \frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2} \right) \text{ または } (a_x, a_y)$$