物理学Ｉ（力学）3 回目：位置・速度・加速度（続き）

中野武雄

2012年4月25日

1

1回目課題の解答(1)

Q:富士スピードウェイ（一周4.563 km）の4輪コースレコードは1分17秒287である（2008年、フェリペ・マッサ）。平均速度は何m/s か。また何 km/h か。

$$v=\frac{L}{T}=\frac{4563[\mathrm{m}]}{(60+17.287)[\mathrm{s}]}=59.040[\mathrm{m/s}]$$

$$1[\mathrm{km}]=1000[\mathrm{m}]\Rightarrow 1=\boxed{\frac{1}{1000}\left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{m}}\right]},\quad 3600[\mathrm{s}]=1[\mathrm{h}]\Rightarrow 1=3600\left[\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{h}}\right]$$

より $v=59.040[\mathrm{m/s}]\times\frac{1}{1000}\left[\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{m}}\right]\times 3600\left[\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{h}}\right]=212.54[\mathrm{km/h}]$

2

1回目課題の解答(2)

Q:月の地球を周る公転運動を円運動と考え、月ー地球の距離を38万km、月の公転周期を27.3日とし、月の速度を km/h で求めなさい。

$r=38\times10^4[\mathrm{km}]$、$T=27.3[\mathrm{day}]$ とすると、

$1[\mathrm{day}]=24[\mathrm{h}]$ より $1=\frac{24[\mathrm{h}]}{1[\mathrm{day}]}$ を用いて

$$v=\boxed{\frac{2\pi r}{T}}=\frac{2\times3.14\times38\times10^4[\mathrm{km}]}{27.3[\mathrm{day}]\times\frac{24[\mathrm{h}]}{1[\mathrm{day}]}}=3642.2[\mathrm{km/h}]$$

有効数字は2桁だから、$v=3.6\times10^3[\mathrm{km/h}]$

3

1回目課題の解答(3)

Q:地球の平均密度は5.51g/cm3である。地球を半径6.36×10³ kmの真球と仮定して、質量をkg単位で求めよ。

$$M=V\rho=\frac{4}{3}\pi r^3\rho$$

$$V=\frac{4}{3}\times3.142\times\left(6.36\times10^3[\mathrm{km}]\right)^3=1.078\times10^{12}[\mathrm{km}^3]$$

10^{-3}

$$\rho=5.51\left[\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\right]\times\frac{1[\mathrm{kg}]}{1000[\mathrm{g}]}\times\left(\frac{100\times1000[\mathrm{cm}]}{1[\mathrm{km}]}\right)^3=5.51\times10^{12}[\mathrm{kg/km}^3]$$

両者をかけて、$M=5.94\times10^{24}[\mathrm{kg}]$

10^{15}

4

1回目課題の解答(4)

Q:1カラットは0.200gと規定されている。ダイヤモンド1カラットに含まれる炭素原子は何個か。炭素の原子量は12.0として計算せよ。

アボガドロ数 $N_A=6.022\times10^{23}[\text{個}/\mathrm{mol}]$ を用いて

炭素原子1個の質量 m_C を求めると、

$$m_C=\frac{12.0[\mathrm{g/mol}]}{6.022\times10^{23}[\text{個}/\mathrm{mol}]}=1.993\times10^{-23}[\mathrm{g}/\text{個}]$$

2.0×10^{-23}

よって1カラット0.200[g]に含まれる炭素原子の数は、

$$n=\frac{0.200[\mathrm{g}]}{1.993\times10^{-23}[\mathrm{g}/\text{個}]}=1.0035\times10^{22}[\text{個}]$$

有効桁数を3桁として、$n=1.00\times10^{22}[\text{個}]$

5

今日の内容

- 前回のおさらい
- 質点の運動の表現：2次元
  - デカルト座標と平面極座標
  - 平面極座標における速度・加速度
- 等速円運動の成分表現

6

前回のおさらい

- 1次元の運動の表現：時間－位置グラフ
- 速度：位置の時間微分
- 加速度：速度の時間微分
- 重要な微分公式（前回配布プリント参照）
  - 特に「合成関数の微分」
- 1次元の運動の例
  - 等速運動
  - 等加速度運動
  - 単振動

これ以降はもう一度振り返っていきましょう。

7

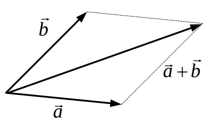
2次元座標

- 位置を定めるのに2つの数字が必要
  - 囲碁・将棋の桝目
  - 地球上の位置：緯度・経度
  - 「成分」という
- 物理学でよく用いる2次元座標系
  - デカルト座標（直交座標）
  - 極座標

8

ベクトル

- 大きさ・方向・向きを持つ
- 「スカラー倍」が定義されている
- 「2つのベクトルの合成（和）」が平行四辺形の原理によって定義される。「分解」もできる。



交換則： $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

結合則： $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

分配則： $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$

$k\vec{a}+l\vec{a}=(k+l)\vec{a}$

位置ベクトル・速度ベクトル・加速度ベクトル

- 位置：ある基準点（原点）から、注目している質点までのベクトルとして表現可能

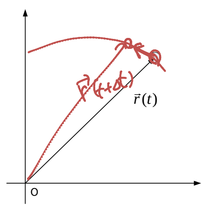
速度ベクトル：

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

加速度ベクトル：

$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

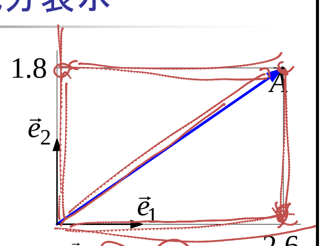


ベクトルの成分表示

- 「基準ベクトル」を用いる
  - 直交している
  - 大きさは 1

無次元

- ベクトルの大きさが三平方の定理から計算できる



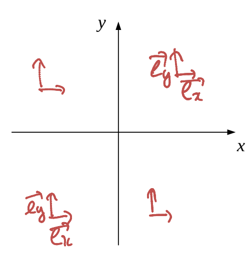
$\vec{A}=2.6\vec{e}_1+1.8\vec{e}_2$

$\to(2.6, 1.8)$

$\left|\vec{A}\right|=\sqrt{2.6^2+1.8^2}=3.2$

デカルト座標

- 直交座標
- 基準ベクトルが空間のどこでも一様
- ベクトルの和・差が、成分ごとの和・差によって処理できる
→微分計算も成分ごとに実行可能



2次元デカルト座標での速度ベクトルの成分表示

位置ベクトル

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y \Rightarrow (x(t),\, y(t))$$

速度ベクトル

$$\vec{r}(t+\Delta t) = x(t+\Delta t)\vec{e}_x + y(t+\Delta t)\vec{e}_y$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \vec{e}_x + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \vec{e}_y \right\}$$

$$= \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \text{ または } (v_x, v_y)$$

2次元デカルト座標での加速度の成分表示

速度ベクトル

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{e}_x + v_y(t)\vec{e}_y \Rightarrow (v_x(t),\, v_y(t))$$

加速度ベクトル

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} \vec{e}_x + \frac{v_y(t+\Delta t) - v_y(t)}{\Delta t} \vec{e}_y \right\}$$

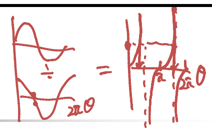
$$= \frac{dv_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{dv_y}{dt}\vec{e}_y \Rightarrow \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}\right) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$

$$\Rightarrow (a_x, a_y)$$

2次元デカルト座標では…

- x 成分と y 成分に分けて、それぞれ1次元と同様に位置→速度→加速度の関係を用いれば良い。
- 1次元の問題を2つ並列に解くのと同じ。
- 例えばy方向の加速度が-g、x 方向の加速度が 0 の問題なら、x 成分は等速運動、y 方向は等加速度運動。これらを合成すればok
  →放物運動

平面極座標



- 原点からの距離 r と、x軸からの角度θで指定する座標。
- 曲線(曲面)直交座標系:位置ベクトルの差分は、座標の各成分の差…では表現できない。
- デカルト座標系との関係は:

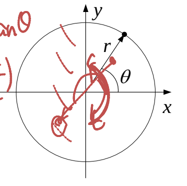
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) & (x>0) \\ \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & (x<0) \end{cases} \end{cases}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$



座標変換の例

$$(x, y) = (1[\mathrm{m}], 2[\mathrm{m}])$$

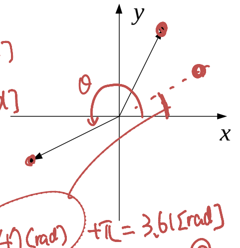
$$r = \sqrt{(1[\mathrm{m}])^2 + (2[\mathrm{m}])^2} = 2.2[\mathrm{m}]$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2[\mathrm{m}]}{1[\mathrm{m}]}\right) = 1.11[\mathrm{rad}]$$

$$(x, y) = (-2[\mathrm{m}], -1[\mathrm{m}])$$

$$r = 2.2[\mathrm{m}]$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-1[\mathrm{m}]}{-2[\mathrm{m}]}\right) = 0.47[\mathrm{rad}] + \pi = 3.61[\mathrm{rad}]$$



座標変換の例

$$(x, y) = (2[\mathrm{m}],)$$

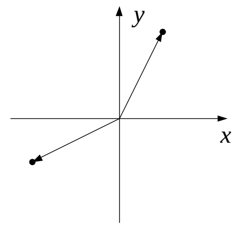
$$r = \sqrt{(1[\mathrm{m}])^2 + (2[\mathrm{m}])^2} = 2.2[\mathrm{m}]$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{2[\mathrm{m}]}{1[\mathrm{m}]}\right) = 1.11[\mathrm{rad}]$$

$$(x, y) = (-2[\mathrm{m}], -1[\mathrm{m}])$$

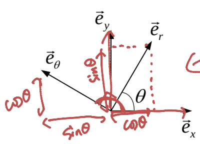
$$r = 2.2[\mathrm{m}]$$

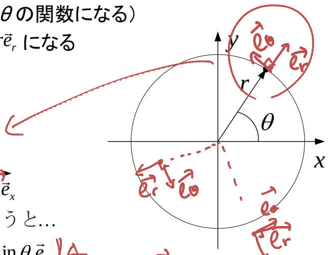
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1[\mathrm{m}]}{2[\mathrm{m}]}\right) \boxed{+\pi} = 3.61[\mathrm{rad}]$$



平面極座標の基準ベクトル

- 場所によって違う（θ の関数になる）
- 「位置ベクトル」は $r\vec{e}_r$ になる



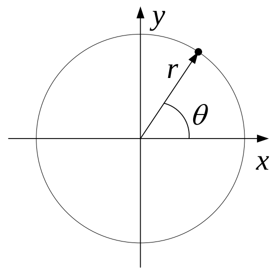


「定数」$\vec{e}_x$、$\vec{e}_y$を使うと…

$$\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y = \cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_x + \sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_y$$

極座標での速度の成分表示

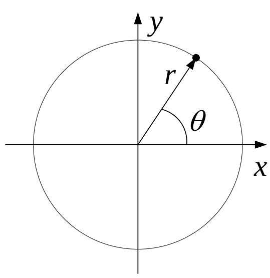


$$\vec{e}_r(t) = \cos\theta(t)\vec{e}_x + \sin\theta(t)\vec{e}_y$$
$$\vec{e}_\theta(t) = -\sin\theta(t)\vec{e}_x + \cos\theta(t)\vec{e}_y$$

よって

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = -\sin\theta(t)\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_x + \cos\theta(t)\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_y$$
$$= \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$$
$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_x - \sin\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_y$$
$$= -\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_r$$

極座標での速度の成分表示

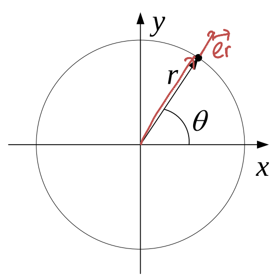


$$\vec{e}_r(t) = \cos\theta(t)\vec{e}_x + \sin\theta(t)\vec{e}_y$$
$$\vec{e}_\theta(t) = -\sin\theta(t)\vec{e}_x + \cos\theta(t)\vec{e}_y$$

よって

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = -\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_x + \cos\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_y$$
$$= \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$$
$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_x - \sin\theta\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_y$$
$$= -\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_r$$

極座標での速度の成分表示



$\vec{v}$ 　　$\vec{r} = r\vec{e}_r$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r)$$
$$= \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$
$$= \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$$

$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$と比較して、

$$v_r = \frac{dr}{dt},\quad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$

極座標での加速度

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta\right\}$$

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,\quad a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

極座標での加速度

$\vec{v}$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta\right\}$$
$$= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$
$$= \frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta - r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_r$$
$$= \left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right\}\vec{e}_r + \left\{r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right\}\vec{e}_\theta$$

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,\quad a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

a_θの別表現の確認

$$0 = \frac{2}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{2}{r}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\right)\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{r}\left\{\frac{1}{2}2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\right\}$$

$$= 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

- 将来「角運動量保存則」を議論するときに使います。

25

等速円運動：デカルト座標版

周期T

$\omega T = 2\pi$

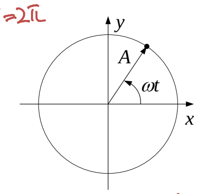
$r = A$（一定）, $\theta = \omega t$

$x = A\cos\omega t$, $\quad y = A\sin\omega t$

$v_x = -\omega A\sin\omega t$, $\quad v_y = \omega A\cos\omega t$,

$a_x = -\omega^2 A\cos\omega t$ $\quad a_y = -\omega^2 A\sin\omega t$

$= -\omega^2 x$ $\quad = -\omega^2 y$



$$\vec{a} = -\omega^2 x\vec{e}_x - \omega^2 y\vec{e}_y = -\omega^2(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) = -\omega^2\vec{r}$$

$|\vec{a}| = \sqrt{(-\omega^2 x)^2 + (-\omega^2 y)^2} = \omega^2 A$

26

等速円運動：極座標版

$r = A$（一定）, $\theta = \omega t$

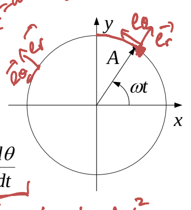
$\frac{d\theta}{dt} = \omega$ $\quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$

$r(t) = A$(一定), $\quad \theta(t) = \omega t$

$v_r = \frac{dr}{dt} = 0$, $\quad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = A\omega$,

$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ $\quad a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}$

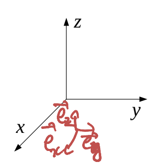
$= -A\omega^2$ $\quad = 0$



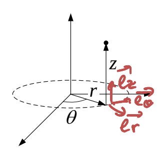
$|\vec{a}| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = |a_r| = A\omega^2$

27

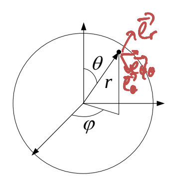
参考：3次元の座標



3次元デカルト座標



円筒座標



3次元極座標

28