## 物理学Ⅰ（力学）3 回目：位置・速度・加速度（続き）

中野武雄

2012年4月25日



## 今日の内容

- 前回のおさらい
- 質点の運動の表現：2次元
  - デカルト座標と平面極座標
  - 平面極座標における速度・加速度
- 等速円運動の成分表現



## 前回のおさらい

- 1次元の運動の表現：時間－位置グラフ
- 速度：位置の時間微分
- 加速度：速度の時間微分
- 重要な微分公式（前回配布プリント参照）
  - 特に「合成関数の微分」
- 1次元の運動の例
  - 等速運動
  - 等加速度運動
  - 単振動

これ以降はもう一度振り返っていきましょう。



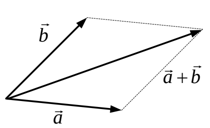
## 2次元座標

- 位置を定めるのに2つの数字が必要
  - 囲碁・将棋の桝目
  - 地球上の位置：緯度・経度
  - 「成分」という
- 物理学でよく用いる2次元座標系
  - デカルト座標（直交座標）
  - 極座標



## ベクトル

- 大きさ・方向・向きを持つ
- 「スカラー倍」が定義されている
- 「2つのベクトルの合成（和）」が平行四辺形の原理によって定義される。「分解」もできる。




交換則： $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

結合則： $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

分配則： $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$



## 位置ベクトル・速度ベクトル・加速度ベクトル

- 位置：ある基準点（原点）から、注目している質点までのベクトルとして表現可能

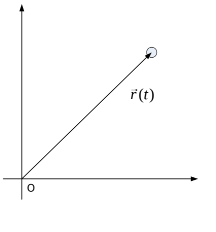
速度ベクトル：

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\frac{d\vec{r}}{dt}$$

加速度ベクトル：

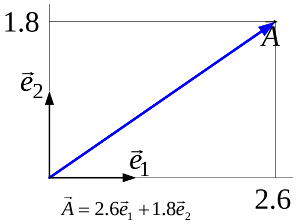
$$\vec{a}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)}{\Delta t}$$

$$=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$



## ベクトルの成分表示

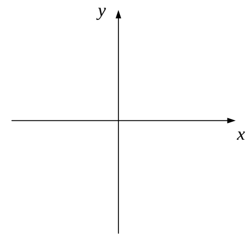
- 「基準ベクトル」を用いる
  - 直交している
  - 大きさは 1
- ベクトルの大きさが三平方の定理から計算できる




$$\vec{A} = 2.6\vec{e}_1 + 1.8\vec{e}_2$$
$$\rightarrow (2.6, 1.8)$$
$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{2.6^2 + 1.8^2} = 3.2$$

## デカルト座標

- 直交座標
- 基準ベクトルが空間のどこでも一様
- ベクトルの和・差が、成分ごとの和・差によって処理できる
→微分計算も成分ごとに実行可能




## 2次元デカルト座標での速度ベクトルの成分表示

位置ベクトル

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y \Rightarrow (x(t), y(t))$$

速度ベクトル

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\vec{e}_x + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t}\vec{e}_y \right\}$$
$$= \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \text{ または } (v_x, v_y)$$

## 2次元デカルト座標での加速度の成分表示

速度ベクトル

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{e}_x + v_y(t)\vec{e}_y \Rightarrow (v_x(t), v_y(t))$$

加速度ベクトル

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}\vec{e}_x + \frac{v_y(t+\Delta t) - v_y(t)}{\Delta t}\vec{e}_y \right\}$$
$$= \frac{dv_x}{dt}\vec{e}_x + \frac{dv_y}{dt}\vec{e}_y \Rightarrow \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}\right) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$$
$$\Rightarrow (a_x, a_y)$$



## 2次元デカルト座標では…

- x 成分と y 成分に分けて、それぞれ1次元と同様に位置→速度→加速度の関係を用いれば良い。
- 1次元の問題を2つ並列に解くのと同じ。
- 例えばy方向の加速度が-g、x 方向の加速度が 0 の問題なら、x 成分は等速度運動、y 方向は等加速度運動。これらを合成すればok
→放物運動



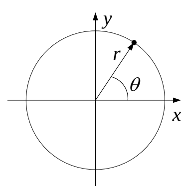
## 平面極座標

- 原点からの距離 r と、x軸からの角度θで指定する座標。
- 曲線（曲面）直交座標系：位置ベクトルの差分は、座標の各成分の差…では表現できない。
- デカルト座標系との関係は：

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

または

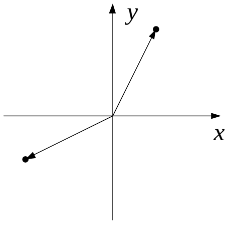
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) & (x > 0) \\ \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi & (x < 0) \end{cases} \end{cases}$$



## 座標変換の例

$(x, y) = (1[\mathrm{m}], 2[\mathrm{m}])$

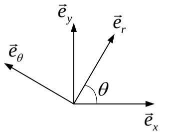
$(x, y) = (-2[\mathrm{m}], -1[\mathrm{m}])$




17

## 平面極座標の基準ベクトル

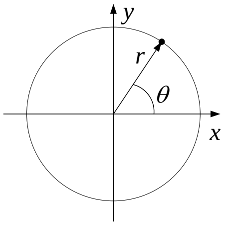
- 場所によって違う（$\theta$の関数になる）
- 「位置ベクトル」は$r\vec{e}_r$ になる




「定数」$\vec{e}_x$、$\vec{e}_y$を使うと…

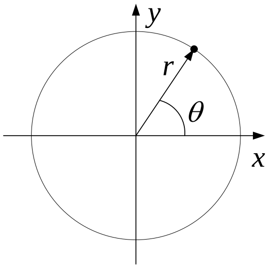
$$\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y$$




19

## 極座標での速度の成分表示




$$\vec{e}_r(t) = \cos\theta(t)\vec{e}_x + \sin\theta(t)\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\theta(t) = -\sin\theta(t)\vec{e}_x + \cos\theta(t)\vec{e}_y$$

よって

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} =$$

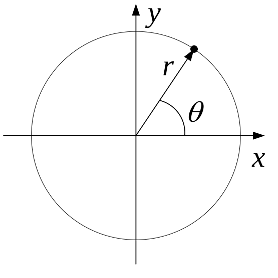
$$= \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} =$$

$$= -\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_r$$

20

## 極座標での速度の成分表示




$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r)$$

$$= \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

$$= \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta$$

$\vec{v} = v_r\vec{e}_r + v_\theta\vec{e}_\theta$ と比較して、

$$v_r = \frac{dr}{dt},\quad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$

22

## 極座標での加速度

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta\right\}$$

$$a_r = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,\quad a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{2}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\right)$$

23

## $a_\theta$の別表現の確認

$$\frac{2}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{2}{r}\left\{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\right)\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{r}\left\{\frac{1}{2}2r\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + \frac{1}{2}r^2\frac{d^2\theta}{dt^2}\right\}$$

$$= 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

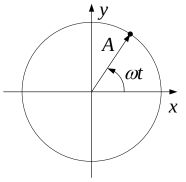
- 将来「角運動量保存則」を議論するときに使います。

25

## 等速円運動：デカルト座標版

$r = A$（一定）, $\theta = \omega t$

$$
\begin{aligned}
x &= A\cos\omega t, & y &= A\sin\omega t \\
v_x &= -\omega A\sin\omega t, & v_y &= \omega A\cos\omega t, \\
a_x &= -\omega^2 A\cos\omega t & a_y &= -\omega^2 A\sin\omega t \\
&= -\omega^2 x & &= -\omega^2 y
\end{aligned}
$$



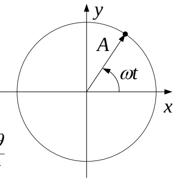

$$\vec{a} = -\omega^2 x\vec{e}_x - \omega^2 y\vec{e}_y = -\omega^2(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) = -\omega^2\vec{r}$$

26

## 等速円運動：極座標版

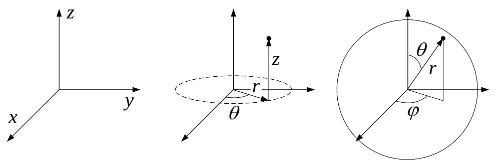
$r = A$（一定）, $\theta = \omega t$

$$
\begin{aligned}
r(t) &= A(\text{一定}), & \theta(t) &= \omega t \\
v_r &= \frac{dr}{dt} = 0, & v_\theta &= r\frac{d\theta}{dt} = A\omega, \\
a_r &= \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 & a_\theta &= r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} \\
&= -A\omega^2 & &= 0
\end{aligned}
$$




27

## 参考：3次元の座標




3次元デカルト座標　円筒座標　3次元極座標

28