

物理学 I (力学) 4 回目: 運動の3法則と運動方程式

中野武雄
2012年5月1日

2回目課題の解答 1(a)

Q: 等加速度運動 $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$ において、 $x_0 = 10[\text{m}]$ 、 $v_0 = 100[\text{km/h}]$ 、 $a_0 = -9.8[\text{m/s}^2]$ として以下の問いに答えよ。
→ $x(t)$ の式を t で微分し、 $v(t)$ の式を得よ。

A: $v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v_0 + a_0 t (= 27.8 [\text{m/s}] + 9.8[\text{m/s}^2] t)$

$1[\text{km}] = 1000[\text{m}]$ よ $1 = \frac{1000[\text{m}]}{1[\text{km}]}$ 、 $1[\text{h}] = 3600[\text{s}]$ よ $1 = \frac{1[\text{h}]}{3600[\text{s}]}$ 。

よって $100[\text{km/h}] = 100 \frac{[\text{km}]}{[\text{h}]} \times \frac{1000[\text{m}]}{1[\text{km}]} \times \frac{1[\text{h}]}{3600[\text{s}]} = 27.778[\text{m/s}]$ 。

2回目課題の解答 1(b)

速度が0になるのは何[s]後か。そのときの位置は何[m]か。

$v(t) = v_0 + a_0 t = 0$ となる時刻 t は

$$t = -\frac{v_0}{a_0} = -\frac{27.778[\text{m/s}]}{-9.8[\text{m/s}^2]} = 2.8345[\text{s}] \sim 2.83[\text{s}]$$

そのときの位置は

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 \\ &= 10[\text{m}] + 27.778[\text{m/s}] \times 2.8345[\text{s}] + \frac{1}{2} \times (-9.8[\text{m/s}^2]) \times (2.8345[\text{s}])^2 \\ &= 49.368 - 49.4[\text{m}] \end{aligned}$$

2回目課題の解答 1(c)

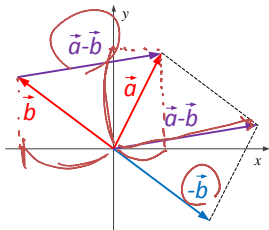
位置が0[m]になるのは何[s]後か。

$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 = 0$ となる時刻は、二次方程式の解より

$$\begin{aligned} t &= \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2a_0 x_0}}{a_0} \\ &= \frac{-27.778[\text{m/s}] \pm \sqrt{(27.778[\text{m/s}])^2 - 2 \times (-9.8[\text{m/s}^2]) \times 10[\text{m}]}}{-9.8[\text{m/s}^2]} \\ &= -0.33965[\text{s}], 6.0086[\text{s}] \sim 6.01[\text{s}] \end{aligned}$$

2回目課題の解答 2(a)

ベクトル $\vec{a} = (1.0[\text{m}], 2.0[\text{m}])$ 、 $\vec{b} = (-2.0[\text{m}], 1.5[\text{m}])$ について:
直交する x 軸・ y 軸を描き、 \vec{a} 、 \vec{b} 、 $\vec{a}-\vec{b}$ 各ベクトルを図示せよ



2回目課題の解答 2(b)

$\vec{a}-\vec{b}$ ベクトルを成分表示し、長さを求めよ。

$$\begin{aligned} \vec{a}-\vec{b} &= (1.0[\text{m}], 2.0[\text{m}]) - (-2.0[\text{m}], 1.5[\text{m}]) \\ &= (3.0[\text{m}], 0.5[\text{m}]) \end{aligned}$$

$$|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{(3.0[\text{m}])^2 + (0.5[\text{m}])^2} = \sqrt{9.25[\text{m}^2]} = 3.04[\text{m}]$$

今日の内容

- 前回のおさらい
- 運動の法則
 - 第1法則: 慣性の法則
 - 第2法則: 運動の法則
 - 第3法則: 作用・反作用の法則
- 運動方程式の性質
 - 位置について2階の微分方程式
 - 積分: 微分の逆演算
 - 微分方程式にあらわれる積分定数と運動方程式の初期値

前回のおさらい

- 2次元の運動の表現:
 - ベクトル: 差分、スカラー倍が定義→微分が可能
 - 位置ベクトル: 「原点」から物体の座標に向かうベクトル
 - 速度ベクトル: 位置ベクトルの時間微分
 - 加速度ベクトル: 速度ベクトルの時間微分
- 座標系とベクトルの成分表示
 - 基準ベクトル(長さ1で互いに直交)によるベクトルの分解→各基準ベクトルのスカラー係数が「成分」
 - デカルト座標: 基準ベクトルが不変。x成分、y成分に分離して考えるだけで良い
 - 極座標: 基準ベクトルがθによって変わる。位置ベクトルを時間微分→速度ベクトルの成分表現
速度ベクトルを時間微分→加速度ベクトルの成分表現

2次元デカルト座標

位置ベクトル

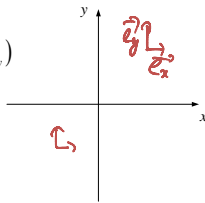
$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y \Rightarrow (x(t), y(t))$$

速度ベクトル

$$\vec{v} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy(t)}{dt}\vec{e}_y \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \equiv (v_x, v_y)$$

加速度ベクトル

$$\vec{a} = \frac{dv_x(t)}{dt}\vec{e}_x + \frac{dv_y(t)}{dt}\vec{e}_y \Rightarrow \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}\right) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) \equiv (a_x, a_y)$$



平面極座標

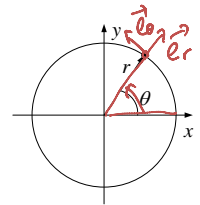
$$\begin{aligned} \vec{e}_r(t) &= \cos\theta(t)\vec{e}_x + \sin\theta(t)\vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta(t) &= -\sin\theta(t)\vec{e}_x + \cos\theta(t)\vec{e}_y \\ \Rightarrow \frac{d\vec{e}_r}{dt} &= \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta, \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_r \end{aligned}$$

$$\vec{r} = (r\vec{e}_r)$$

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} \\ &= \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta \\ \Rightarrow (v_r, v_\theta) &= \left(\frac{dr}{dt}, r\frac{d\theta}{dt}\right) \end{aligned}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dots$$

$$\Rightarrow (a_r, a_\theta) = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \frac{2}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right)$$



補遺: $\cos\theta(t)$ の時間微分

$\theta(t)$ の時間微分

$$\rightarrow \frac{d\theta}{dt}$$



$\cos\theta$ の θ による微分

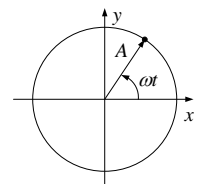
$$\rightarrow \frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta$$

$\cos\theta(t)$ の t による微分 $\rightarrow \frac{d}{d\theta}\cos\theta(t) \frac{d\theta}{dt} = -\sin\theta \frac{d\theta}{dt}$

等速円運動: デカルト座標版

$$r = A (\text{一定}), \quad \theta = \omega t$$

$$\begin{aligned} x &= A\cos\omega t, & y &= A\sin\omega t \\ v_x &= -\omega A\sin\omega t, & v_y &= \omega A\cos\omega t \\ a_x &= -\omega^2 A\cos\omega t & a_y &= -\omega^2 A\sin\omega t \\ &= -\omega^2 x & &= -\omega^2 y \end{aligned}$$



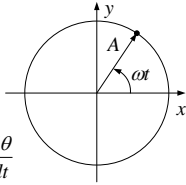
等速円運動: 極座標版

$$r = A (\text{一定}), \quad \theta = \omega t$$

$$r(t) = A (\text{一定}), \quad \theta(t) = \omega t$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = 0, \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = A\omega,$$

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -A\omega^2, \quad a_\theta = r \frac{d^2 \theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = 0$$



運動の法則

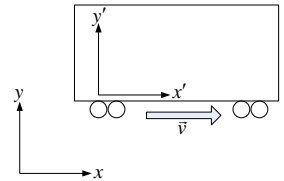
- 第1法則: 慣性の法則
 - 他からの影響を受けない物体が行う運動は、(慣性系から観測すると)等速度運動である
- 第2法則: 運動の法則
 - 物体に力が加わると、(慣性系から観測すると)物体には力に比例する加速度が加わる
- 第3法則: 作用・反作用の法則
 - 2つの物体間の相互作用の作用と反作用は、大きさが等しく、2つの物体を結ぶ直線上に生じ、逆向きである

第1法則

- 「他から影響を受けない」
→ 物体に作用する力が 0
- 「等速度運動」
 - 「等速度」とは、「速度ベクトル」が時間によって変化しないこと。向きも変わっちゃダメなことに注意!
 - 速いものは速いまま、遅いものは遅いまま、止まったものは止まったまま。

座標系・慣性系

- 第一法則(および第二法則)が成立するのは、**特殊な座標系(慣性系)**に限られる。
 - 前回までは座標系の目盛の振り方について議論してきた。
 - 2つの座標系の間には、**相対運動**があったら?
 - 「相対運動、非慣性系」の回に詳しくやります。



第2法則

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \vec{f} \quad (m\vec{a} = \vec{f})$$

- m (スカラー量) は物体の「慣性」を特徴づける量で、「慣性質量」という。
- この関係から、力はベクトル量であることが導かれる。物体に複数の力が作用しているときは、それぞれの作用を表わす力の「合力」が物体の加速度を決める。

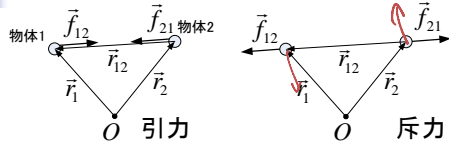
$$\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \dots = \sum_i \vec{f}_i$$

力の単位 [N]

- 加速度のSI単位系での表記は $[m/s^2]$
- 質量のSI単位は $[kg]$

よって力のSI単位系表記は $[kg \cdot m/s^2]$ となるが、これには $[N]$ (Newton) という名称が付いている。

第3法則



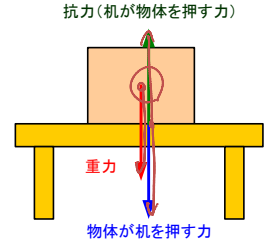
作用(1が2に及ぼす力)と反作用(2が1に及ぼす力)は

- 大きさが等しく
- 2つの物体を結ぶ直線上に生じ
- 逆向き

つまり、2物体間の相互作用は引力・斥力の2種類しかない
なお第3法則は**物体の運動状態に依存しない**のもポイント。

「力のつり合い」との違い

- 「力のつり合い」は、1つの物体に働く力の合力が0である、ということ
- 「作用反作用」は、2つの物体にそれぞれ働く相互作用が、逆向きで等しい大きさ、ということ



運動方程式

- 第2法則を微分形式で書いたもの

$$a = \frac{1}{m} \vec{f}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{1}{m} \vec{f}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

Handwritten notes: $f(t)$, $\int \int$, \vec{r} , \vec{v} , t

「2階(2回)微分すると \vec{f} になる関数 \vec{r} を探せ」
 \vec{f} は通常、時間・位置・速度などの関数

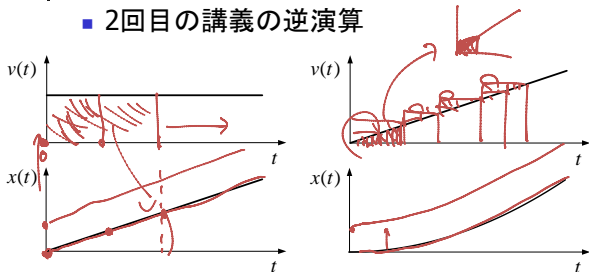
位置 ← 速度 ← 加速度

- 位置 → 速度 → 加速度 の関係は2回目、3回目にやってきました。
 - 位置を時間微分すると速度
 - 速度を時間微分すると加速度
 - 「位置 ↔ 速度」と「速度 ↔ 加速度」の相互関係は等価
- 逆向きの演算はどのようになるか？
 - とりあえず1次元で「位置 ↔ 速度」を考えてみよう
 - 速度は時間の関数として既知であるとして

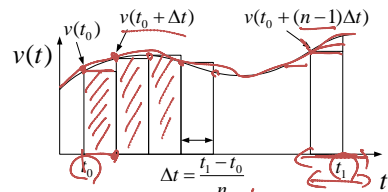
Handwritten note: $x - \text{速度} = \text{時間}$

速度から位置を求める

- 2回目の講義の逆演算



区分求積と定積分



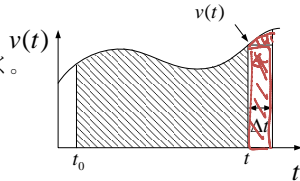
$$x(t_1) - x(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \{v(t_0)\Delta t + v(t_0 + \Delta t)\Delta t + \dots + v(t_0 + (n-1)\Delta t)\Delta t\}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} v(t_0 + i\Delta t) \Delta t \equiv \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$$

不定積分と微分

積分の上限を変数 t と置く。
(下限 t_0 は定数のまま)

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t v(t) dt$$



$$x(t + \Delta t) - x(t) = \int_t^{t + \Delta t} v(t) dt \rightarrow \frac{v(t) \Delta t}{\Delta t}$$

よって $v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \left(\equiv \frac{dx}{dt} \right)$

$$x(t) = \int_{t_0}^t v(t) dt + x(t_0) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v(t)$$

積分:まとめ

- 微分の逆演算
 - 速度から位置を得る
 - 加速度から速度を得る
- 「積分定数」分の不定性 → 「初期値」が必要

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t) \Leftrightarrow F(t) = \int_{t_0}^t f(t) dt + C$$

(なお不定積分 $\int f(t) dt$ は、単に $\int f(t) dt$ とも書く)

いくつかの積分公式

$$\int t^n dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \sin t dt = -\cos t + C, \quad \int \cos t dt = \sin t + C$$

$$\int af(t) dt = aF(t) + C$$

$$\int (f(t) + g(t)) dt = F(t) + G(t) + C$$

$$\int f(g(t)) g'(t) dt = F(g(t)) + C$$

$$(\text{ただし } F(t) = \int f(t) dt, G(t) = \int g(t) dt)$$

位置・速度によらない力

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m} f(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt} (=v(t)) = \int \frac{1}{m} f(t) dt + C_1$$

$$\Rightarrow x(=v) = \int \left(\frac{dx}{dt} \right) dt + C_2$$

$$= \frac{1}{m} \int \left(\int f(t) dt \right) dt + C_1 t + C_2$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{1}{m} mg$$

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt} (=v(t)) = -gt + C_1$$

$$\Rightarrow x(=v) = -\frac{1}{2} gt^2 + C_1 t + C_2$$

$$t=0 \text{ における位置 } x_0 = C_2$$

$$t=0 \text{ における速度 } v_0 = C_1$$

$$x = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + x_0$$

運動方程式を解くプロセス

- 2階微分方程式 → 積分定数が2つ入る
 1. 物体に作用する力を調べ、運動方程式を作る
 2. 運動方程式を解く
 3. 初期条件から、積分定数を決める
 4. 時間の関数として位置を決める
- 力が位置や速度に依存する場合は?
 - 単純な積分では解けない。
 - 常に解けるとも限らない。
- 2次元以上の運動方程式は?
 - ベクトルの成分ごとの連立微分方程式となる