物理学 I（力学）4 回目：運動の3法則と運動方程式

中野武雄
2012年5月1日

2回目課題の解答 1(a)

Q：　等加速度運動 $x(t)=x_0+v_0t+\frac{1}{2}a_0t^2$ において、$x_0=10[\mathrm{m}]$、$v_0=100[\mathrm{km/h}]$、$a_0=-9.8[\mathrm{m/s^2}]$として以下の問いに答えよ。

$\rightarrow x(t)$の式をtで微分し、$v(t)$の式を得よ。

A：　$v(t)=\frac{dx(t)}{dt}=v_0+a_0t\left(=27.8\ [\mathrm{m/s}]+9.8[\mathrm{m/s^2}]\,t\right)$

$1[\mathrm{km}]=1000[\mathrm{m}]$ より $1=\frac{1000[\mathrm{m}]}{1[\mathrm{km}]}$、$1[\mathrm{h}]=3600[\mathrm{s}]$より $1=\frac{1[\mathrm{h}]}{3600[\mathrm{s}]}$。

よって $100[\mathrm{km/h}]=100[\mathrm{km/h}]\times\frac{1000[\mathrm{m}]}{1[\mathrm{km}]}\times\frac{1[\mathrm{h}]}{3600[\mathrm{s}]}=27.778[\mathrm{m/s}]$。

2回目課題の解答 1(b)

速度が0になるのは何[s]後か。そのときの位置は何[m]か。

$v(t)=v_0+a_0t=0$ となる時刻 t は

$t=-\frac{v_0}{a_0}=-\frac{27.778[\mathrm{m/s}]}{-9.8[\mathrm{m/s^2}]}=2.8345[\mathrm{s}]\sim 2.83[\mathrm{s}]$。

そのときの位置は

$x(t)=x_0+v_0t+\frac{1}{2}a_0t^2$

$=10[\mathrm{m}]+27.778[\mathrm{m/s}]\times 2.8345[\mathrm{s}]+\frac{1}{2}\times\left(-9.8[\mathrm{m/s^2}]\right)\times\left(2.8345[\mathrm{s}]\right)^2$

$=49.368\sim 49.4[\mathrm{m}]$

2回目課題の解答 1(c)

位置が0[m]になるのは何[s]後か。

$x(t)=x_0+v_0t+\frac{1}{2}a_0t^2=0$ となる時刻は、二次方程式の解より

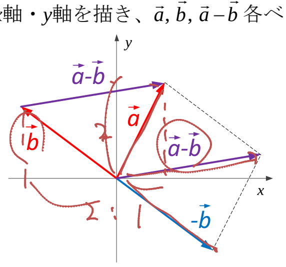
$t=\frac{-v_0\pm\sqrt{v_0^{\,2}-2a_0x_0}}{a_0}$

$=\frac{-27.778[\mathrm{m/s}]\pm\sqrt{(27.778[\mathrm{m/s}])^2-2\times\left(-9.8[\mathrm{m/s^2}]\right)\times 10[\mathrm{m}]}}{-9.8[\mathrm{m/s^2}]}$

$=-0.33965[\mathrm{s}],\ 6.0086[\mathrm{s}]\sim 6.01[\mathrm{s}]$

2回目課題の解答 2(a)

ベクトル $\vec{a}=(1.0[\mathrm{m}],2.0[\mathrm{m}])$、$\vec{b}=(-2.0[\mathrm{m}],1.5[\mathrm{m}])$について：
直交するx軸・y軸を描き、$\vec{a},\vec{b},\vec{a}-\vec{b}$ 各ベクトルを図示せよ



2回目課題の解答 2(b)

$\vec{a}-\vec{b}$ ベクトルを成分表示し、長さを求めよ。

$\vec{a}-\vec{b}=(1.0[\mathrm{m}],2.0[\mathrm{m}])-(-2.0[\mathrm{m}],1.5[\mathrm{m}])$
$=(3.0[\mathrm{m}],0.5[\mathrm{m}])$

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{(3.0[\mathrm{m}])^2+(0.5[\mathrm{m}])^2}=\sqrt{9.25[\mathrm{m^2}]}=3.04[\mathrm{m}]$

今日の内容

- 前回のおさらい
- 運動の法則
  - 第1法則：慣性の法則
  - 第2法則：運動の法則
  - 第3法則：作用・反作用の法則
- 運動方程式の性質
  - 位置について 2 階の微分方程式
  - 積分：微分の逆演算
  - 微分方程式にあらわれる積分定数と運動方程式の初期値

前回のおさらい

- 2次元の運動の表現：
  - ベクトル：差分、スカラー倍が定義→微分が可能
  - 位置ベクトル：「原点」から物体の座標に向かうベクトル
  - 速度ベクトル：位置ベクトルの時間微分
  - 加速度ベクトル：速度ベクトルの時間微分
- 座標系とベクトルの成分表示
  - 基準ベクトル（長さ1で互いに直交）によるベクトルの分解
→各基準ベクトルのスカラー係数が「成分」
  - デカルト座標：基準ベクトルが不変。
x成分、y成分に分離して考えるだけで良い
  - 極座標：基準ベクトルがθによって変わる。
位置ベクトルを時間微分→速度ベクトルの成分表現
速度ベクトルを時間微分→加速度ベクトルの成分表現

2次元デカルト座標

位置ベクトル

$$\vec r(t) = x(t)\vec e_x + y(t)\vec e_y \Rightarrow (x(t), y(t))$$

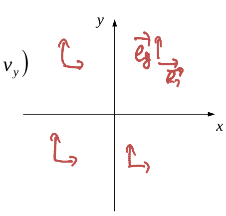
速度ベクトル

$$\vec v = \frac{dx(t)}{dt}\vec e_x + \frac{dy(t)}{dt}\vec e_y \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \equiv (v_x, v_y)$$

加速度ベクトル

$$\vec a = \frac{dv_x(t)}{dt}\vec e_x + \frac{dv_y(t)}{dt}\vec e_y$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}\right) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) \equiv (a_x, a_y)$$



平面極座標

$$\vec e_r(t) = \cos\theta(t)\vec e_x + \sin\theta(t)\vec e_y$$

$$\vec e_\theta(t) = -\sin\theta(t)\vec e_x + \cos\theta(t)\vec e_y$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec e_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec e_\theta, \quad \frac{d\vec e_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec e_r$$

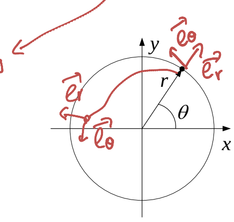
$$\vec r = (r\vec e_r)$$

$$\vec v = \frac{d}{dt}(r\vec e_r) = \frac{dr}{dt}\vec e_r + r\frac{d\vec e_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec e_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec e_\theta$$

$$\Rightarrow (v_r, v_\theta) = \left(\frac{dr}{dt}, r\frac{d\theta}{dt}\right)$$

$$\vec a = \frac{d\vec v}{dt} = \dots$$

$$\Rightarrow (a_r, a_\theta) = \left(\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2, \frac{2}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right)$$



補遺：cosθ(t) の時間微分

$\theta(t)$の時間微分 $\rightarrow \frac{d\theta}{dt}$

$\cos\theta$のθによる微分 $\rightarrow \frac{d}{d\theta}\cos\theta = -\sin\theta$

$\cos\theta(t)$のtによる微分 $\rightarrow \underbrace{\frac{d}{d\theta}\cos\theta(t)\frac{d\theta}{dt}}_{\frac{d}{dt}\cos\theta(t)} = -\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$

等速円運動：デカルト座標版

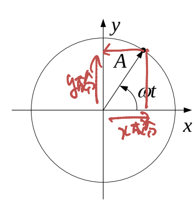
$r = A$（一定）, $\theta = \omega t$

$$x = A\cos\omega t, \qquad y = A\sin\omega t$$

$$v_x = -\omega A\sin\omega t, \qquad v_y = \omega A\cos\omega t,$$

$$a_x = -\omega^2 A\cos\omega t \qquad a_y = -\omega^2 A\sin\omega t$$

$$= -\omega^2 x \qquad\qquad = -\omega^2 y$$



等速円運動：極座標版

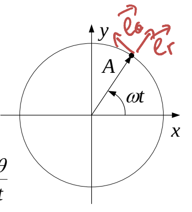
$r = A(\text{一定}),\quad \theta = \omega t$

$\frac{dr}{dt}=0 \quad \frac{d^2r}{dt^2}=0 \qquad \frac{d\theta}{dt}=\omega \quad \frac{d^2\theta}{dt^2}=0$

$$r(t) = A(\text{一定}), \qquad \theta(t) = \omega t$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = 0, \qquad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = A\omega,$$

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -A\omega^2 \qquad a_\theta = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = 0$$



運動の法則

- 第1法則：慣性の法則
  - 他からの影響を受けない物体が行う運動は、（慣性系から観測すると）等速度運動である
- 第2法則：運動の法則
  - 物体に力が加わると、（慣性系から観測すると）物体には力に比例する加速度が加わる
- 第3法則：作用・反作用の法則
  - 2つの物体間の相互作用の作用と反作用は、大きさが等しく、2つの物体を結ぶ直線上に生じ、逆向きである

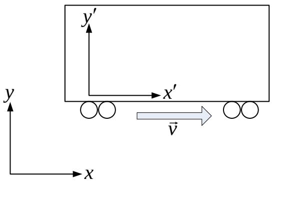
第1法則

- 「他から影響を受けない」
  →物体に作用する力が 0 (合力)
- 「等速度運動」
  - 「等速度」とは、「速度ベクトル」が時間によって変化しないこと。向きも変わっちゃダメなことに注意！
  - 速いものは速いまま、遅いものは遅いまま、止まったものは止まったまま。

座標系・慣性系

- 第一法則（および第二法則）が成立するのは、特殊な座標系（慣性系）に限られる。

  - 前回までは座標系の目盛の振り方について議論してきた。
  - 2つの座標系の間に相対運動があったら？
  - 「相対運動、非慣性系」の回に詳しくやります。



第2法則

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{f} \quad \left(m\vec{a} = \vec{f}\right)$$

- m（スカラー量）は物体の「慣性」を特徴づける量で、「慣性質量」という。
- この関係から、力はベクトル量であることが導かれる。物体に複数の力が作用しているときは、それぞれの作用を表わす力の「合力」が物体の加速度を決める。

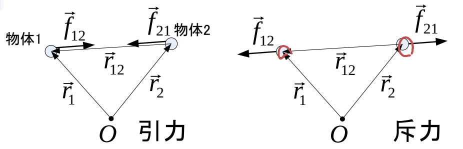
$$\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \cdots = \sum_i \vec{f}_i$$

力の単位 [N]

- 加速度のSI単位系での表記は [m/s²]
- 質量の SI 単位は [kg]

よって力の SI 単位系表記は [kg m/s²] となるが、これには [N] (Newton)という名称が付いている。

第3法則



作用（1が2に及ぼす力）と反作用（2が1に及ぼす力）は

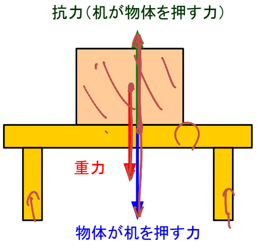
- 大きさが等しく
- 2つの物体を結ぶ直線上に生じ
- 逆向き

つまり、2物体間の相互作用は引力・斥力の2種類しかない

なお第3法則は物体の運動状態に依存しないのもポイント。

「力のつり合い」との違い

- 「力のつり合い」は、1つの物体に働く力の合力が0である、ということ
- 「作用反作用」は、2つの物体にそれぞれ働く相互作用が、逆向きで等しい大きさ、ということ



運動方程式

- 第2法則を微分形式で書いたもの

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{f}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{1}{m}\vec{f}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

「2階（2回）微分すると $\vec{f}$ になる関数 $\vec{r}$ を探せ」

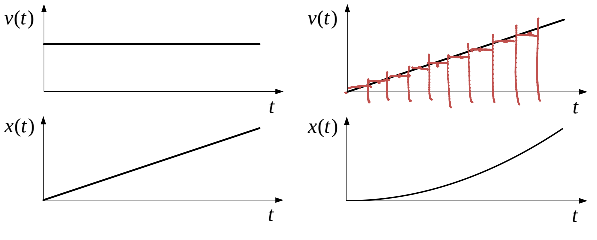
$\vec{f}$ は通常、時間・位置・速度などの関数

位置←速度←加速度

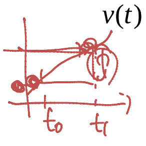
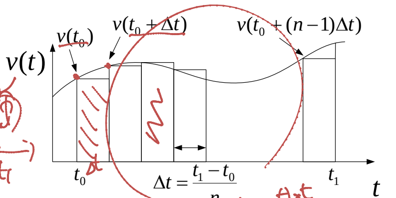
- 位置→速度→加速度 の関係は2回目、3回目にやってきました。
  - 位置を時間微分すると速度
  - 速度を時間微分すると加速度
  - 「位置⇔速度」と「速度⇔加速度」の相互関係は等価
- 逆向きの演算はどのようになるか？
  - とりあえず1次元で「位置⇔速度」を考えてみよう
  - 速度は時間の関数として既知であるとします

速度から位置を求める

- 2回目の講義の逆演算



区分求積と定積分

$x(t_1) - x(t_0)$

$= \lim_{\Delta t \to 0}\{v(t_0)\Delta t + v(t_0+\Delta t)\Delta t + \cdots + v(t_0+(n-1)\Delta t)\Delta t\}$

$= \lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=0}^{n-1} v(t_0 + i\Delta t) \equiv \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$

不定積分と微分

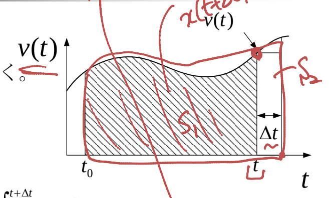
$v(t) = \frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$

$x(t)-x(t_0)=S_1$

$x(t+\Delta t)-x(t_0)=S_2$

積分の上限を変数 t と置く。
（下限 t_0 は定数のまま）

$$x(t)-x(t_0)=\int_{t_0}^{t} v(t)dt$$



$$x(t+\Delta t)-x(t)=\int_{t}^{t+\Delta t} v(t)dt \underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} v(t)\Delta t$$

よって　$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}\left(\equiv \frac{dx}{dt}\right)$

$$x(t)=\int_{t_0}^{t} v(t)dt + x(t_0) \Leftrightarrow \frac{dx}{dt}=v(t)$$

S_2-S_1
$= x(t+\Delta t)-x(t)$
$\underset{\Delta t\to 0}{\longrightarrow} v(t)\Delta t$

積分：まとめ

- 微分の逆演算
  - 速度から位置を得る
  - 加速度から速度を得る
- 「積分定数」分の不定性→「初期値」が必要

$$\frac{dF(t)}{dt}=f(t) \Leftrightarrow F(t)=\int_{t_0}^{t} f(t)dt + C$$

（なお不定積分 $\int_{t_0}^{t} f(t)dt$ は、単に $\int f(t)dt$ とも書く）

いくつかの積分公式

$$\int t^n dt = \frac{1}{n+1}t^{n+1}+C \quad (n\neq -1)$$

$$\int \sin t\, dt = -\cos t + C, \quad \int \cos t\, dt = \sin t + C$$

$$\int af(t)dt = aF(t)+C$$

$$\int (f(t)+g(t))dt = F(t)+G(t)+C$$

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t)) + C$$

$$\left(\text{ただし } F(t)=\int f(t)dt, G(t)=\int g(t)dt\right)$$

位置・速度によらない力

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{1}{m}f(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt}(=v(t))=\int \frac{1}{m}f(t)dt + C_1$$

$$\Rightarrow x(=v)=\int\left(\frac{dx}{dt}\right)dt + C_2$$

$$=\frac{1}{m}\int\left(\int f(t)dt\right)dt + C_1 t + C_2$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-\frac{1}{m}mg$$

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt}(=v(t))=-gt+C_1$$

$$\Rightarrow x(=v)=-\frac{1}{2}gt^2+C_1 t + C_2$$

$t=0$ における位置 $x_0=C_2$

$t=0$ における速度 $v_0=C_1$

$$x=-\frac{1}{2}gt^2+v_0 t + x_0$$

運動方程式を解くプロセス

- 2階微分方程式→積分定数が2つ入る
  1. 物体に作用する力を調べ、運動方程式を作る
  2. 運動方程式を解く
  3. 初期条件から、積分定数を決める
  4. 時間の関数として位置を決める
- 力が位置や速度に依存する場合は？
  - 単純な積分では解けない。
  - 常に解けるとも限らない。
- 2次元以上の運動方程式は？
  - ベクトルの成分ごとの連立微分方程式となる