物理学Ⅰ（力学）4 回目：運動の3法則と運動方程式

中野武雄

2012年5月1日

今日の内容

- 前回のおさらい
- 運動の法則
  - 第1法則：慣性の法則
  - 第2法則：運動の法則
  - 第3法則：作用・反作用の法則
- 運動方程式の性質
  - 位置について 2 階の微分方程式
  - 積分：微分の逆演算
  - 微分方程式にあらわれる積分定数と運動方程式の初期値

運動の法則

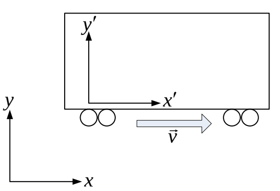
- 第1法則：慣性の法則
  - 他からの影響を受けない物体が行う運動は、（慣性系から観測すると）等速度運動である
- 第2法則：運動の法則
  - 物体に力が加わると、（慣性系から観測すると）物体には力に比例する加速度が加わる
- 第3法則：作用・反作用の法則
  - 2つの物体間の相互作用の作用と反作用は、大きさが等しく、2つの物体を結ぶ直線上に生じ、逆向きである

第1法則

- 「他から影響を受けない」→物体に作用する力が 0
- 「等速度運動」
  - 「等速度」とは、「速度ベクトル」が時間によって変化しないこと。向きも変わっちゃダメなことに注意！
  - 速いものは速いまま、遅いものは遅いまま、止まったものは止まったまま。

座標系・慣性系

- 第一法則（および第二法則）が成立するのは、特殊な座標系（慣性系）に限られる。
  - 前回までは座標系の目盛の振り方について議論してきた。
  - 2つの座標系の間に相対運動があったら？
  - 「相対運動、非慣性系」の回に詳しくやります。



第2法則

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{f} \qquad \left(m\vec{a} = \vec{f}\right)$$

- m（スカラー量）は物体の「慣性」を特徴づける量で、「慣性質量」という。
- この関係から、力はベクトル量であることが導かれる。物体に複数の力が作用しているときは、それぞれの作用を表わす力の「合力」が物体の加速度を決める。

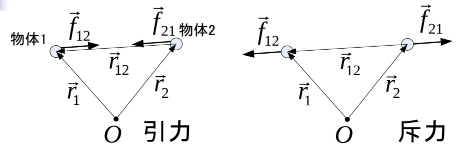
$$\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \cdots = \sum_i \vec{f}_i$$

力の単位 [N]

- 加速度のSI単位系での表記は [m/s^2]
- 質量の SI 単位は [kg]

よって力の SI 単位系表記は [kg m/s^2] となるが、これには [N] (Newton)という名称が付いている。

第3法則



作用（1が2に及ぼす力）と反作用（2が1に及ぼす力）は

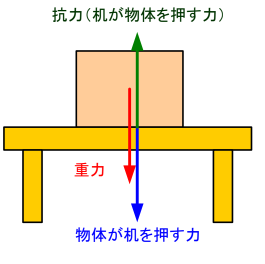
- 大きさが等しく
- 2つの物体を結ぶ直線上に生じ
- 逆向き

つまり、2物体間の相互作用は引力・斥力の2種類しかない

なお第3法則は物体の運動状態に依存しないのもポイント。

「力のつり合い」との違い

- 「力のつり合い」は、1つの物体に働く力の合力が0である、ということ
- 「作用反作用」は、2つの物体にそれぞれ働く相互作用が、逆向きで等しい大きさ、ということ



運動方程式

- 第2法則を微分形式で書いたもの

$$\vec{a}=\frac{1}{m}\vec{f}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}=\frac{1}{m}\vec{f}$$

「2階（2回）微分すると $\vec{f}$ になる関数 $\vec{r}$ を探せ」

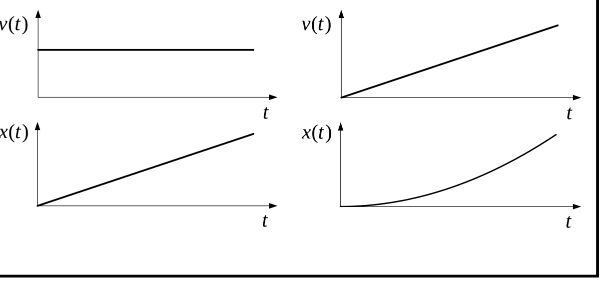
$\vec{f}$ は通常、時間・位置・速度などの関数

位置←速度←加速度

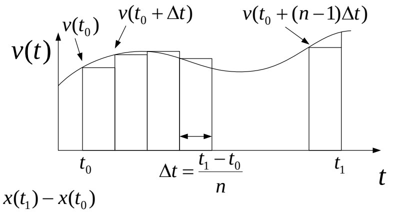
- 位置→速度→加速度 の関係は 2回目、3回目にやってきました。
  - 位置を時間微分すると速度
  - 速度を時間微分すると加速度
  - 「位置⇔速度」と「速度⇔加速度」の相互関係は等価
- 逆向きの演算はどのようになるか？
  - とりあえず1次元で「位置⇔速度」を考えてみよう
  - 速度は時間の関数として既知であるとします

速度から位置を求める

- 2回目の講義の逆演算



区分求積と定積分

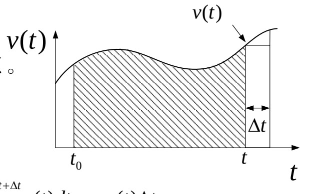


$$
\begin{aligned}
&x(t_1) - x(t_0) \\
&= \lim_{\Delta t \to 0}\{v(t_0)\Delta t + v(t_0+\Delta t)\Delta t + \cdots + v(t_0+(n-1)\Delta t)\Delta t\} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0}\sum_{i=0}^{n-1} v(t_0 + i\Delta t) \equiv \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt
\end{aligned}
$$

不定積分と微分

積分の上限を変数 t と置く。
(下限 t_0 は定数のまま)

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(t)dt$$



$$x(t+\Delta t) - x(t) = \int_{t}^{t+\Delta t} v(t)dt \underset{\Delta t \to 0}{\to} v(t)\Delta t$$

よって $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}\left(\equiv \frac{dx}{dt}\right)$

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} v(t)dt + x(t_0) \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = v(t)$$

積分：まとめ

- 微分の逆演算
  - 速度から位置を得る
  - 加速度から速度を得る
- 「積分定数」分の不定性→「初期値」が必要

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t) \Leftrightarrow F(t) = \int_{t_0}^{t} f(t)dt + C$$

(なお不定積分 $\int_{t_0}^{t} f(t)dt$ は、単に $\int f(t)dt$ とも書く)

いくつかの積分公式

$$\int t^n dt = \frac{1}{n+1}t^{n+1} + C \quad (n \neq -1)$$

$$\int \sin t\, dt = -\cos t + C, \quad \int \cos t\, dt = \sin t + C$$

$$\int af(t)dt = aF(t) + C$$

$$\int (f(t) + g(t))dt = F(t) + G(t) + C$$

$$\int f(g(t))\, g'(t)\, dt = F(g(t)) + C$$

$$\left(\text{ただし } F(t) = \int f(t)dt, G(t) = \int g(t)dt\right)$$

位置・速度によらない力

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}f(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dt}(=v(t)) = \int \frac{1}{m}f(t)dt + C_1$$

$$\Rightarrow x(=v) = \int\left(\frac{dx}{dt}\right)dt + C_2$$

$$= \frac{1}{m}\int\left(\int f(t)dt\right)dt + C_1 t + C_2$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\frac{1}{m}mg$$

$$\Rightarrow \frac{dx(t)}{dt}(=v(t)) = -gt + C_1$$

$$\Rightarrow x(=v) = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2$$

$t=0$ における位置 $x_0 = C_2$

$t=0$ における速度 $v_0 = C_1$

$$x = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0$$

運動方程式を解くプロセス

- 2階微分方程式→積分定数が2つ入る
  1. 物体に作用する力を調べ、運動方程式を作る
  2. 運動方程式を解く
  3. 初期条件から、積分定数を決める
  4. 時間の関数として位置を決める
- 力が位置や速度に依存する場合は？
  - 単純な積分では解けない。
  - 常に解けるとも限らない。
- 2次元以上の運動方程式は？
  - ベクトルの成分ごとの連立微分方程式となる