物理学Ⅰ(力学)5 回目:簡単な運動方程式・代表的な運動

中野武雄

2012年5月08日

3回目課題の解答(1)

$x = A\cos\omega t$
$y = A\sin\omega t$

$\omega T = 2\pi$

Q: 1回目にやった月の公転運動($r = 38$万km、周期27.3日(角速度 $2\pi/27.3[\mathrm{day}^{-1}]$))を等速円運動とみなし、加速度ベクトルの大きさを$[\mathrm{m/s^2}]$単位で求めよ

A: 等速円運動の加速度ベクトルの極座標系での成分表示は$(-r\omega^2, 0)$だから、ベクトルの大きさは$|\vec{a}| = \sqrt{(-r\omega^2)^2 + 0^2} = r\omega^2$。

$$r\omega^2 = 38\times10^4[\mathrm{km}]\times\left(\frac{2\pi}{27.3}[\mathrm{day}^{-1}]\right)^2 = 2.01\times10^4[\mathrm{km/day^2}]$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$$= 2.01\times10^4[\mathrm{km/day^2}]\times\left(\frac{1[\mathrm{day}]}{86400[\mathrm{s}]}\right)^2\times\left(\frac{1000[\mathrm{m}]}{1[\mathrm{km}]}\right)$$

$$= 2.70\times10^{-3}[\mathrm{m/s^2}]$$

m

3回目課題の解答(2)

Q: 地上から止まって見える人工衛星(静止衛星)は、地球中心からの距離が4万2千kmである。運動を周期1日の等速円運動とみなし、加速度ベクトルの大きさを求めよ。

A: 1と同様に計算して

$$r\omega^2 = 4.2\times10^4[\mathrm{km}]\times\left(\frac{2\pi}{1}[\mathrm{day}^{-1}]\right)^2 = 1.66\times10^6[\mathrm{km/day^2}]$$

$$= 1.66\times10^6[\mathrm{km/day^2}]\times\left(\frac{1[\mathrm{day}]}{86400[\mathrm{s}]}\right)^2\times\left(\frac{1000[\mathrm{m}]}{1[\mathrm{km}]}\right)$$

$$= 2.22\times10^{-1}[\mathrm{m/s^2}]$$

3回目課題の解答(3)

$ar^2 = \mathrm{const}$
$a = \frac{\mathrm{const}}{r^2}$

Q: 地表は地球中心から6.4×10^3 kmの位置にあり、重力加速度は$9.8[\mathrm{m/s^2}]$である。1,2の場合とともに、加速度と地球中心からの距離の2乗との関係を考察せよ。

A: 加速度と距離の2乗の積は

1: $|\vec{a}|r^2 = 2.70\times10^{-3}[\mathrm{m/s^2}]\times(38\times10^7[\mathrm{m}])^2 = 3.89\times10^{14}[\mathrm{m^3/s^2}]$

2: $|\vec{a}|r^2 = 2.22\times10^{-1}[\mathrm{m/s^2}]\times(4.2\times10^7[\mathrm{m}])^2 = 3.92\times10^{14}[\mathrm{m^3/s^2}]$

地表: $gR^2 = 9.8[\mathrm{m/s^2}]\times(6.4\times10^6[\mathrm{m}])^2 = 4.01\times10^{14}\ [\mathrm{m^3/s^2}]$

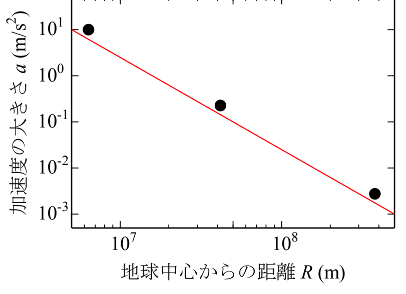
誤差を考慮するとおおむね一致しているので、加速度は地球中心からの距離の2乗に反比例しているものと考えられる。

参考:両対数グラフ

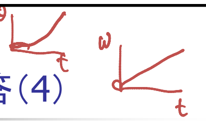
$a = \frac{C}{r^2}$

$\log a = \log C - 2\log r$

$A = C' - 2R$



3回目課題の解答(4)



Q: 円周上を動く物体において、速度$\omega = d\theta/dt$が時間とともに一定の割合で増加する運動を考える。$t=0$で$\omega=0$とし、その後の運動におけるa_r、a_θの時間発展のグラフの概形を描け。

A: ωは時間とともに一定の割合で増加し、$t=0$で$\omega=0$ なので$\omega = \alpha t$と置ける。

すなわち$\frac{d\theta}{dt} = \alpha t \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt} = \alpha$。

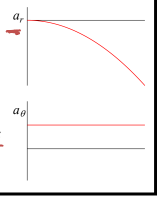
一方$r = A$は時間によらない定数なので、

$$\frac{dr}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = 0$$

これらを極座標の加速度の成分表示に代入すれば、

$$a_r = \underbrace{\frac{d^2r}{dt^2}}_{0} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \underbrace{-A\alpha^2t^2}_{-A\alpha^2t^2},\quad a_\theta = r\underbrace{\frac{d^2\theta}{dt^2}}_{A\alpha} + 2\underbrace{\frac{dr}{dt}}_{0}\frac{d\theta}{dt} = A\alpha$$

を得る。



今日の内容

- 前回のおさらい
- 一次元の運動
  - 等速度運動　$F = 0$
  - 等加速度運動　$F = F_0$（定数）
  - 単振動　$F = -kx$
- 二次元の運動
  - 放物運動
  - 坂を滑り降りる運動
  - 円運動・振り子の運動

前回のおさらい

- 運動の法則：
  - 第1法則：慣性の法則
  - 第2法則：運動の法則
  - 第3法則：作用・反作用の法則
- 運動方程式
  - 力→加速度→速度→位置
  - 定積分：区分求積法の極限
  - 不定積分：微分の逆演算
  - 2階の微分方程式→2つの積分定数

運動の法則

- 第1法則：慣性の法則
  - 「慣性系」の前提に注意
- 第2法則：運動の法則
  - やはり慣性系に注意
  - 力の単位 [N] を定める法則とも言える
- 第3法則：作用・反作用の法則
  - 「力の釣り合い」と混同しないよう注意
  - 2つの物体に働く力。一直線上、であるのも重要

運動方程式

- 第二法則を微分形式で書いたもの

$$\vec{a} = \frac{1}{m}\vec{f}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{1}{m}\vec{f}(t)$$

「2階微分（2回微分）すると $\vec{f}$ になる関数を探せ」

$\vec{f}$ は通常、時間・位置・速度などの関数

（不定）積分

$\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau$

$\int_{t_0}^{t} f(y)dy$

- 微分の逆演算
  - 速度から位置を得る
  - 加速度から速度を得る
- 「積分定数」分の不定性→「初期値」が必要 c

$$\frac{dF(t)}{dt} = f(t) \Leftrightarrow F(t) = \int_{t_0}^{t} f(t)dt + C$$

（なお不定積分 $\int_{t_0}^{t} f(t)dt$ は、単に $\int f(t)dt$ とも書く）

運動方程式を解くプロセス

- 2階微分方程式→積分定数が2つ入る
  1. 物体に作用する力を調べ、運動方程式を作る
  2. 運動方程式を解く
  3. 初期条件から、積分定数を決める
  4. 時間の関数として位置を決める
- 力が位置や速度に依存する場合は？
  - 単純な積分では解けない。
  - 常に解けるとも限らない。
- 2次元以上の運動方程式は？
  - ベクトルの成分ごとの連立微分方程式となる

1次元の運動

F=0：等速度運動

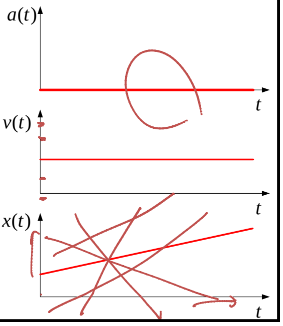
$F=0 \Rightarrow a=\frac{F}{m}=0$　$a=0$

$v=\int a\,dt+C_1=C_1=v_0$

$x=\int C_1\,dt+C_2=C_1t+C_2=x_0$

時刻 $t=0$ における位置を x_0、
速度を v_0 とすれば、

$v(t)=v_0$、$x(t)=v_0t+x_0$



F=一定：等加速度運動

$\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\frac{F_0}{m}\equiv a_0$

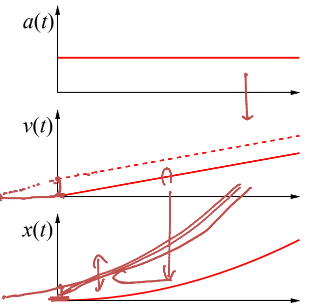
$\frac{dx(t)}{dt}(=v(t))=a_0t+C_1$

$x(t)=\frac{1}{2}a_0t^2+C_1t+C_2$

$t=0$ における位置 $x_0=C_2$

$t=0$ における速度 $v_0=C_1$

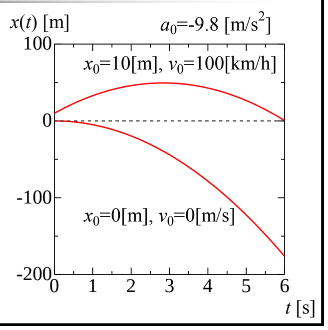
$x(t)=\frac{1}{2}a_0t^2+v_0t+x_0$



等加速度運動：初期値依存性

$x(t)=\frac{1}{2}a_0t^2+v_0t+x_0$

v_0、x_0 を変えるとだいぶ違ったグラフに見える。ただし x 軸、t 軸に沿って適当な平行移動をすれば重なるはず。



等加速度運動：ちょっとした性質

$$\left.\begin{aligned} v(t)&=a_0t+v_0 \\ x(t)&=\frac{1}{2}a_0t^2+v_0t+x_0 \end{aligned}\right\} \text{時刻 } t_1 \text{ での} \begin{Bmatrix} \text{速度 } v_1 \\ \text{位置 } x_1 \end{Bmatrix} \text{とする。}$$

$$v_1=a_0t_1+v_0 \Rightarrow t_1=\frac{v_1-v_0}{a_0}$$

$$x_1=\frac{1}{2}a_0t_1^{\ 2}+v_0t_1+x_0=\frac{1}{2}a_0\left(\frac{v_1-v_0}{a_0}\right)^2+v_0\frac{v_1-v_0}{a_0}+x_0$$

$$=\frac{1}{2}\frac{v_1^{\ 2}-2v_1v_0+v_0^{\ 2}}{a_0}+\frac{v_1v_0-v_0^{\ 2}}{a_0}+x_0=\frac{1}{2}\frac{v_1^{\ 2}-v_0^{\ 2}}{a_0}+x_0$$

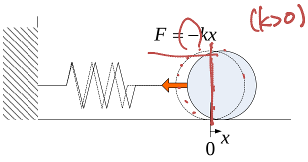
$$\Rightarrow a_0(x_1-x_0)=\frac{1}{2}\left(v_1^{\ 2}-v_0^{\ 2}\right)$$

$2a_0(x_1-x_0)=v_1^2-v_0^2$

余談：重力下での落体の運動

- 地表で質量 m の物体が受ける力は、鉛直下向きに mg。つまり $F=mg$。
- 運動方程式より $F=ma$、よって $g=a$。
→質量によらず、すべての物体が同じ加速度を受ける。
- $F=ma$ の m（慣性質量）と、$F=mg$ の m（重力質量）とが等しい理由は、ニュートン力学の範囲では特に無い。（→一般相対論では両者が等しいことを前提とする）

位置に比例する復元力



- 引っ張り・押し縮めともに、変位に比例して反発する力
- 多くの物質は、変化が微小な範囲ではこのように近似できる

位置に比例する復元力→単振動

$F=-kx$ より運動方程式は $\dfrac{d^2x}{dt^2}=-\dfrac{k}{m}x$ $=\dfrac{d}{dt}(-\omega\sin\omega t)$

$\dfrac{d}{dt}\sin\omega t=\omega\cos\omega t$, $\dfrac{d^2}{dt^2}\cos\omega t=-\omega^2\cos\omega t$

$\dfrac{d}{dt}\cos\omega t=-\omega\sin\omega t$, $\dfrac{d^2}{dt^2}\sin\omega t=-\omega^2\sin\omega t$

$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

だから $-\omega^2=-\dfrac{k}{m}$ とすれば、$x=\cos\omega t$、$x=\sin\omega t$

は運動方程式の解。それぞれの定数倍もまた解。

$$x=A\cos\omega t+B\sin\omega t$$

とすれば、積分定数２つ (A, B) を含む一般解となる。

角周波数・周波数・周期

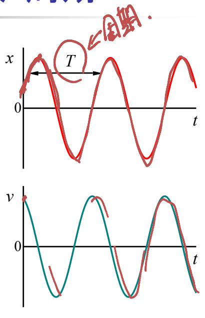
$x=A\cos\omega t+B\sin\omega t$

$v=-\omega A\sin\omega t+\omega B\cos\omega t$

$\omega t=2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$ で元の状態に戻る。 $\omega\leftarrow$角周波数

周期 $T \Leftrightarrow \omega T=2\pi \to T=\dfrac{2\pi}{\omega}$

周波数 $f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}$, or $\omega=2\pi f$



初期条件より積分定数を決定

$x(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ $x(0)=A$ $\cos 0=1$

$v(t)=-\omega A\sin\omega t+\omega B\cos\omega t$ $v(0)=\omega B$ $\sin 0=0$

時刻０における位置を x_0、速度を v_0 とすると、

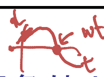
$$A=x_0,\quad B=\frac{v_0}{\omega}$$

と決まる。なお三角関数の和積公式から

$$A\cos\omega t+B\sin\omega t=C\sin(\omega t+\phi_0)$$

となるように C, ϕ_0 を選べる

⇒「位相」のずれた単振動



$\omega t+\phi_0=\pi$

$\sin(\theta+\phi)$
$=\sin\theta\cos\phi+\cos\phi\sin\theta$

初期条件より積分定数を決定

$C\sin(\omega t+\phi_0)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ ← を満たす C と ϕ_0 を決めたい

$C\sin(\omega t+\phi_0)=C\sin\phi_0\cos\omega t+C\cos\phi_0\sin\omega t$ ← 和積公式

両者を比べて

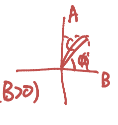
$A=C\sin\phi_0$
$B=C\cos\phi_0$ であればよい

$A^2+B^2=C^2(\sin^2\phi_0+\cos^2\phi_0)$ ($=1$)

$C=\sqrt{A^2+B^2}$ ← $|C|$ $x=(\ )\sin(\omega t+\phi_0)$

$\dfrac{A}{B}=\tan\phi_0$

$\phi_0=\begin{cases}\tan^{-1}\left(\dfrac{A}{B}\right) & (B>0)\\ \tan^{-1}\left(\dfrac{A}{B}\right)+\pi & (B<0)\end{cases}$



2次元の運動

放物運動

$m\vec{a}=\vec{f}$

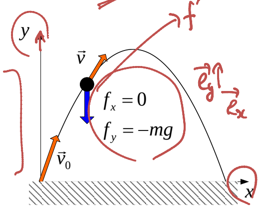
$ma_x\vec{e}_x+ma_y\vec{e}_y=f_x\vec{e}_x+f_y\vec{e}_y$

- 下向きに一定の力
- デカルト座標系では

$$a_x=\frac{f_x}{m}=0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2}=0$$

$$a_y=\frac{f_y}{m}=\frac{-mg}{m} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}=-g$$

で、成分ごとに別々に計算できる。



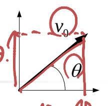
放物運動の解

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0 \quad \Rightarrow v_x=v_{0x}、\qquad x=v_{0x}t+x_0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g \Rightarrow v_y=-gt+v_{0y}、\ y=-\frac{1}{2}gt^2+v_{0y}t+y_0$$

積分定数に相当するのは v_{0x}、v_{0y}、x_0、y_0 の４つ。
２つの次元でそれぞれ２回積分するから。

速度一定下での射出角度と距離



$v_{0x}=v_0\cos\theta$、$v_{0y}=v_0\sin\theta$、$x_0=y_0=0$ のとき：

$x=v_0\cos\theta\, t$ と $y=-\frac{1}{2}gt^2+v_0\sin\theta\, t$ から t を消去

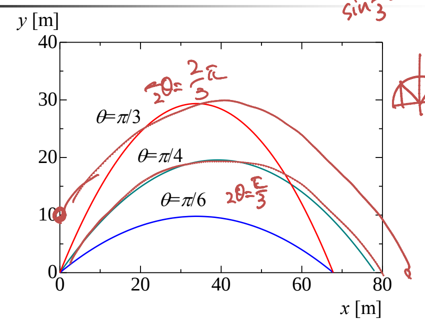
$t=\frac{x}{v_0\cos\theta}$

$$y=-\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\theta}x^2+\tan\theta\, x=\left(-\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\theta}x+\tan\theta\right)x$$

再び $y=0$ となるのは $x=\frac{2{v_0}^2\cos\theta\sin\theta}{g}=\frac{{v_0}^2}{g}\sin 2\theta$

よって $\theta=\frac{\pi}{4}$ (ラジアン)のとき、x は最大値 $\frac{{v_0}^2}{g}$ となる。

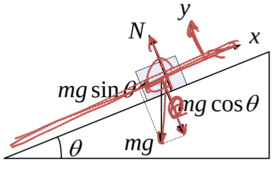
v_0=100 [km/h] のとき



束縛された運動

- ある経路（軌道）に沿うことを強制された運動
  - 斜面に沿って滑降
  - 紐に繋がって円運動
  - 紐に繋がって重力下で振子運動
- その束縛条件を満たすような力が存在するものと考える

束縛力のある運動(1) 斜面の滑降



- 斜面に垂直な方向（y 方向）に束縛→加速度0
- y 方向の合力を0にするような抗力 N を仮定

斜面の滑降

$ma_x = -mg\sin\theta$、$ma_y = 0$

$t=0$での物体の位置を原点、初速度0とすると、

$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\sin\theta$より$v = -g\sin\theta\, t$、$x = -\frac{1}{2}g\sin\theta\, t^2$

yは時間によらず0で一定値をとる。

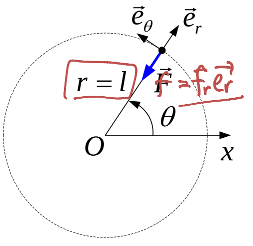
ところで斜面に沿ってx_1まで滑ったときの速さは

$g\sin\theta\, x_1 = \frac{1}{2}v_1^2$で与えられる。このとき$x_1\sin\theta$は

滑り降りた鉛直方向の高さhに等しくなる。

束縛力のある運動(2) 等速円運動

- 紐で原点に結びつけられた物体の運動…と考える
- 距離が束縛されており、力は中心方向に向く、という条件から、θの時間依存性を導く



等速円運動

$r(t) = l$
$\theta(t)$

r成分：$f_r = ma_r = m\left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}$　　$f_r = -ml\omega^2$

θ成分：$f_\theta = ma_\theta = m\left\{\frac{2}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right\} = 0$

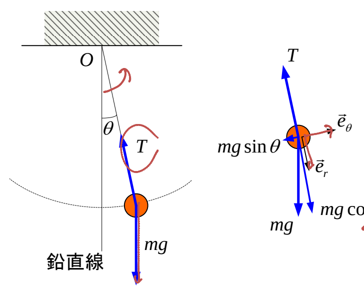
rは定数lなので、$\frac{dr}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = 0$。　　$\omega = \frac{d\theta}{dt}$

また$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}l^2\frac{d\theta}{dt} =$ 定数

よって$\frac{d\theta}{dt} = \omega$一定の運動となる。

またこのとき　$f_r = ma_r = -ml\omega^2$

束縛力のある運動(3) 重力下の振り子



$f_r = mg\cos\theta - T$

$f_\theta = -mg\sin\theta$

$\vec{f} = f_r\vec{e}_r + f_\theta\vec{e}_\theta$

重力下の振り子

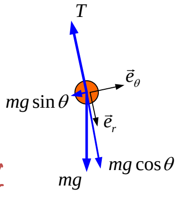
$r = l$ 一定.

r成分：$f_r = ma_r = m\left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}$

θ成分：$f_\theta = ma_\theta = m\left\{\frac{2}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right\}$

$-ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg\cos\theta - T$

$m\left\{\frac{2}{l}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}l^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right\} = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$



重力下の振り子：θが微小のときの解

$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta \approx -g\theta$

これは単振動の方程式と同じ形式。

$\omega^2 \equiv \frac{g}{l} \Leftrightarrow \omega \equiv \sqrt{\frac{g}{l}}$と置けば、

$\theta(t) = \theta_0\sin(\omega t + \phi_0)$は運動方程式の解。

このとき周期$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$