物理学Ｉ（力学）5 回目：簡単な運動方程式・代表的な運動

中野武雄
2012年5月08日

今日の内容

- 前回のおさらい
- 一次元の運動
  - 等速度運動　$F = 0$
  - 等加速度運動　$F = F_0$（定数）
  - 単振動　$F = -kx$
- 二次元の運動
  - 放物運動
  - 坂を滑り降りる運動
  - 円運動・振り子の運動

1次元の運動

F=0：等速度運動

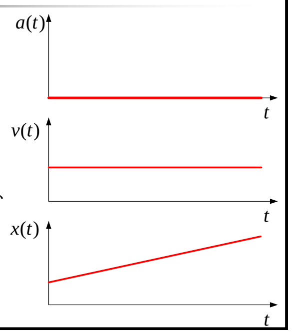
$$F = 0 \Rightarrow a = \frac{F}{m} = 0$$

$$v = \int a\,dt + C_1 = C_1$$

$$x = \int C_1\,dt + C_2 = C_1 t + C_2$$

時刻 $t = 0$ における位置を x_0、速度を v_0 とすれば、

$v(t) = v_0$、$x(t) = v_0 t + x_0$



F=一定：等加速度運動

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{F_0}{m} \equiv a_0$$

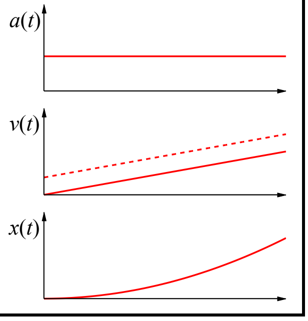
$$\frac{dx(t)}{dt}(= v(t)) = a_0 t + C_1$$

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + C_1 t + C_2$$

$t = 0$ における位置 $x_0 = C_2$

$t = 0$ における速度 $v_0 = C_1$

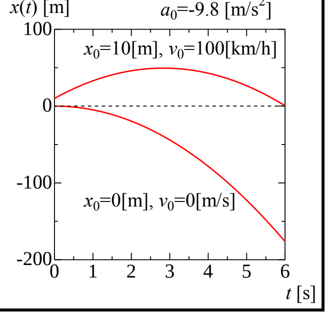
$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$



等加速度運動：初期値依存性

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0$$

v_0、x_0 を変えるとだいぶ違ったグラフに見える。ただし x 軸、t 軸に沿って適当な平行移動をすれば重なるはず。



等加速度運動:ちょっとした性質

$$\left.\begin{aligned} v(t) &= a_0 t + v_0 \\ x(t) &= \frac{1}{2}a_0 t^2 + v_0 t + x_0 \end{aligned}\right\} \text{時刻 } t_1 \text{ での} \left\{\begin{aligned} &\text{速度 } v_1 \\ &\text{位置 } x_1 \end{aligned}\right\} \text{とする。}$$

$$v_1 = a_0 t_1 + v_0 \Rightarrow t_1 = \frac{v_1 - v_0}{a_0}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}a_0 t_1^2 + v_0 t_1 + x_0 = \frac{1}{2}a_0\left(\frac{v_1 - v_0}{a_0}\right)^2 + v_0\frac{v_1 - v_0}{a_0} + x_0$$

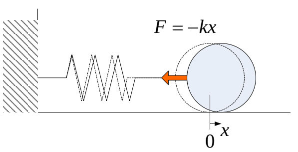
$$= \frac{1}{2}\frac{v_1^2 - 2v_1 v_0 + v_0^2}{a_0} + \frac{v_1 v_0 - v_0^2}{a_0} + x_0 = \frac{1}{2}\frac{v_1^2 - v_0^2}{a_0} + x_0$$

$$\Rightarrow a_0(x_1 - x_0) = \frac{1}{2}\left(v_1^2 - v_0^2\right)$$

余談:重力下での落体の運動

- 地表で質量 m の物体が受ける力は、鉛直下向きに mg。つまり $F=mg$。
- 運動方程式より $F=ma$ 、よって $g=a$。
  →質量によらず、すべての物体が同じ加速度を受ける。
- $F=ma$ の m (慣性質量)と、$F=mg$ の m (重力質量)とが等しい理由は、ニュートン力学の範囲では特に無い。(→一般相対論では両者が等しいことを前提とする)

位置に比例する復元力



- 引っ張り・押し縮めともに、変位に比例して反発する力
- 多くの物質は、変化が微小な範囲ではこのように近似できる

位置に比例する復元力 →単振動

$F=-kx$ より運動方程式は $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{k}{m}x$

$$\frac{d}{dt}\cos\omega t = -\omega\sin\omega t,\quad \frac{d^2}{dt^2}\cos\omega t = -\omega^2\cos\omega t$$

$$\frac{d}{dt}\sin\omega t = \omega\cos\omega t,\quad \frac{d^2}{dt^2}\sin\omega t = -\omega^2\sin\omega t$$

だから $-\omega^2 = -\dfrac{k}{m}$ とすれば、$x=\cos\omega t$、$x=\sin\omega t$

は運動方程式の解。それぞれの定数倍もまた解。

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

とすれば、積分定数２つ (A, B) を含む一般解となる。

初期条件より積分定数を決定

$$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$
$$v = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t$$

時刻 0 における位置を x_0、速度を v_0 とすると、

$$A = x_0、B = \frac{v_0}{\omega}$$

と決まる。なお三角関数の和積公式から

$$A\cos\omega t + B\sin\omega t = C\sin(\omega t + \phi_0)$$

となるように C, ϕ_0 を選べる

⇒「位相」のずれた単振動

初期条件より積分定数を決定

$$C\sin(\omega t + \phi_0) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$
$$C\sin(\omega t + \phi_0) = C\sin\phi_0\cos\omega t + C\cos\phi_0\sin\omega t$$

角周波数・周波数・周期

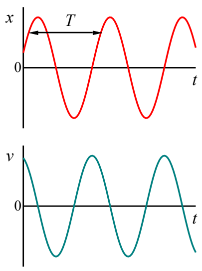
$x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$v = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t$

$\omega t = 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$ で元の状態に戻る。 $\omega \leftarrow$ 角周波数

周期 $T \Leftrightarrow \omega T = 2\pi \to T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

周波数 $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$, or $\omega = 2\pi f$



2次元の運動

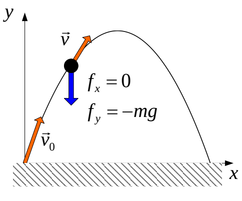
放物運動

- 下向きに一定の力
- デカルト座標系では

$$a_x = \frac{f_x}{m} = 0 \quad \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$a_y = \frac{f_y}{m} = \frac{-mg}{m} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} = -g$$

で、成分ごとに別々に計算できる。



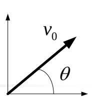
放物運動の解

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0 \quad \Rightarrow v_x = v_{0x}、\qquad x = v_{0x}t + x_0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g \Rightarrow v_y = -gt + v_{0y}、\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0y}t + y_0$$

積分定数に相当するのは v_{0x}、v_{0y}、x_0、y_0 の４つ。
２つの次元でそれぞれ２回積分するから。

速度一定下での射出角度と距離



$v_{0x} = v_0\cos\theta$、$v_{0y} = v_0\sin\theta$、$x_0 = y_0 = 0$ のとき：

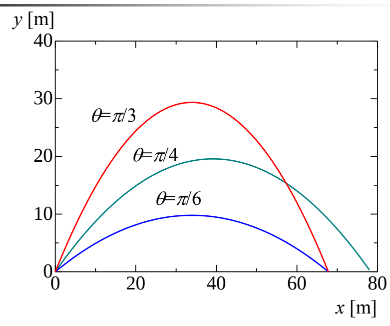
$x = v_0\cos\theta\, t$ と $y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\theta\, t$ から t を消去

$$y = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 + \tan\theta\, x = \left(-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x + \tan\theta\right)x$$

再び $y = 0$ となるのは $x = \dfrac{2v_0^2\cos\theta\sin\theta}{g} = \dfrac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$

よって $\theta = \dfrac{\pi}{4}$(ラジアン)のとき、x は最大値 $\dfrac{v_0^2}{g}$ となる。

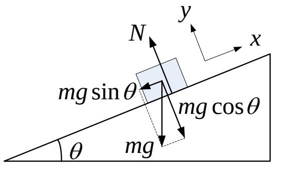
v_0=100 [km/h] のとき



束縛された運動

- ある経路(軌道)に沿うことを強制された運動
  - 斜面に沿って滑降
  - 紐に繋がって円運動
  - 紐に繋がって重力下で振子運動
- その束縛条件を満たすような力が存在するものと考える

束縛力のある運動(1) 斜面の滑降



- 斜面に垂直な方向(y 方向)に束縛→加速度0
- y 方向の合力を0にするような抗力Nを仮定

斜面の滑降

$ma_x = -mg\sin\theta$、$ma_y = 0$

$t=0$での物体の位置を原点、初速度0とすると、

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -g\sin\theta$より$v = -g\sin\theta\, t$、$x = -\dfrac{1}{2}g\sin\theta\, t^2$

yは時間によらず0で一定値をとる。

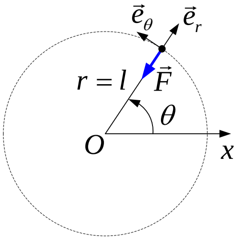
ところで斜面に沿ってx_1まで滑ったときの速さは

$g\sin\theta\, x_1 = \dfrac{1}{2}{v_1}^2$で与えられる。このとき$x_1\sin\theta$は

滑り降りた鉛直方向の高さhに等しくなる。

束縛力のある運動(2) 等速円運動

- 紐で原点に結びつけられた物体の運動 …と考える
- 距離が束縛されており、力は中心方向に向く、という条件から、θの時間依存性を導く



等速円運動

r成分：$f_r = ma_r = m\left\{\dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}$

θ成分：$f_\theta = ma_\theta = m\left\{\dfrac{2}{r}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right)\right\} = 0$

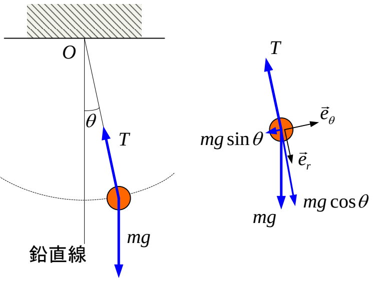
rは定数lなので、$\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{d^2r}{dt^2} = 0$。

また$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}l^2\dfrac{d\theta}{dt} = $定数

よって$\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$一定の運動となる。

またこのとき $f_r = ma_r = -ml\omega^2$

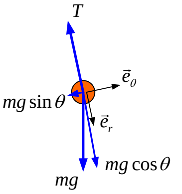
束縛力のある運動(3) 重力下の振り子



重力下の振り子

r成分：$f_r = ma_r = m\left\{\dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}$

θ成分：$f_\theta = ma_\theta = m\left\{\dfrac{2}{r}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right)\right\}$



$$-ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg\cos\theta - T$$

$$m\left\{\frac{2}{l}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}l^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right\} = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

重力下の振り子：θが微小のときの解

$$l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta \approx -g\theta$$

これは単振動の方程式と同じ形式。

$\omega^2 \equiv \dfrac{g}{l} \Leftrightarrow \omega \equiv \sqrt{\dfrac{g}{l}}$と置けば、

$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi_0)$は運動方程式の解。

このとき周期$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$