物理学 I（力学）6 回目：相対運動・非慣性系

中野武雄
2012年5月15日

4回目課題の解答(1)

Q: 地球の質量は5.97×10^{24} [kg]である。いま 5 [t] =5×10^{3} [kg] の玉が、地表近辺において重力を受け、加速度 g=9.8 [m/s^{2}] で落下したとする。このとき、玉が地球から受ける重力の反作用力として、玉は地球を引く。この力によって生じる地球の加速度は何[m/s^{2}] と計算できるか。

A: 地球と玉の質量をm_E、m_Bとし、それぞれが受ける加速度の大きさをa_E、a_Bと置く。各々が受ける力は質量と加速度の積で与えられ、これらの大きさは作用反作用の法則によって等しいから$m_E a_E = m_B a_B$

$$\Rightarrow a_E = \frac{m_B a_B}{m_E} = \frac{5\times10^3[\mathrm{kg}]\times 9.8[\mathrm{m/s^2}]}{5.97\times10^{24}[\mathrm{kg}]} = 8.2\times10^{-21}[\mathrm{m/s^2}]$$

4回目課題の解答(2)

Q: cgs 単位系での力の単位は [dyn] = [g cm/s^{2}] である。1 [dyn] の力は何 [N] であるか。

A:
$$1000\,[\mathrm{g}] = 1[\mathrm{kg}] \Rightarrow 1 = \frac{1[\mathrm{kg}]}{1000\,[\mathrm{g}]}$$

$$100\,[\mathrm{cm}] = 1[\mathrm{m}] \Rightarrow 1 = \frac{1[\mathrm{m}]}{100\,[\mathrm{cm}]}$$

を用いて、

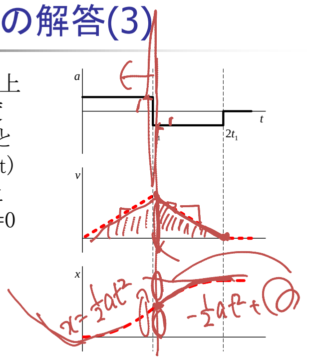
$$1[\mathrm{dyn}] = 1[\mathrm{dyn}]\times1\times1 = 1[\mathrm{g\ cm/s^2}]\times\frac{1[\mathrm{kg}]}{1000\,[\mathrm{g}]}\times\frac{1[\mathrm{m}]}{100\,[\mathrm{cm}]}$$

$$= 1\times10^{-5}[\mathrm{kg\ m/s^2}]$$

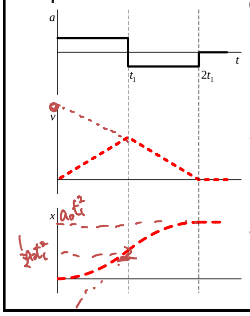
よって$1[\mathrm{dyn}] = 1\times10^{-5}[\mathrm{N}]$。

4回目課題の解答(3)

1次元の運動で、上段のように加速度a(t)が与えられたとき、v(t) および x(t)の概形を描け。ただし v(0)=0, x(0)=0とする。



4回目課題の解答(3続き)



$0 \sim t_1$ まで:

$$a = a_0$$
$$v = a_0 t + C_1$$
$$x = \frac{1}{2}a_0 t^2 + C_1 t + C_2$$

初期条件

$$v(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$$
$$x(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

よって

$$v = a_0 t$$
$$x = \frac{1}{2}a_0 t^2$$

$t_1 \sim 2t_1$ まで:

$$a = -a_0$$
$$v = -a_0 t + C_3$$
$$x = -\frac{1}{2}a_0 t^2 + C_3 t + C_4$$

初期条件

$$v(t_1) = a_0 t_1 \quad \Rightarrow C_3 = 2a_0 t_1$$
$$x(t_1) = \frac{1}{2}a_0 t_1^{\ 2} \Rightarrow C_4 = -a_0 t_1^{\ 2}$$

よって

$$v = -a_0 t + 2a_0 t_1$$
$$x = -\frac{1}{2}a_0 (t-2t_1)^2 + a_0 t_1^{\ 2}$$

今日の内容

- 前回のおさらい
- 相対運動
  - ガリレイ変換
  - 並進運動における慣性系・非慣性系
  - 慣性力
- 回転する座標系
  - 運動方程式の変換（デカルト座標版・極座標版）
  - 慣性力→遠心力・コリオリの力

前回のおさらい

- 運動方程式と1次元の運動:
  - $F=0$: 等速度運動
  - $F=ma_0$: 等加速度運動
  - $F=-kx$: 単振動
- 2次元の運動
  - 放物運動
  - （束縛のある運動:円運動、振子の運動）

1次元の運動（1）

- 等速度運動:
  - （くどいけど）力が0→加速度が0
    →×速度が0、○速度が不変
  - 2つの積分定数:初期位置、初期速度
- 等加速度運動:
  - やはり2つの積分定数
  - $a_0(x_1 - x_0) = \frac{1}{2}\left(v_1^{\ 2} - v_0^{\ 2}\right)$

1次元の運動（2）

$F=-kx$

- 変位に比例する復元力による運動 $m\frac{d^2x}{dt^2}=-kx$
  - 解は単振動 $A\cos\omega t + B\sin\omega t$ ⇐ $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$
  - 初期位置・初期速度からの
    積分定数A, Bの決定 $t=0$ x_0, v_0
  - $A\cos\omega t + B\sin\omega t \rightarrow C\sin(\omega t+\varphi)$
    Cは振幅、φは初期位相

$A=x_0$
$B=\frac{v_0}{\omega}$

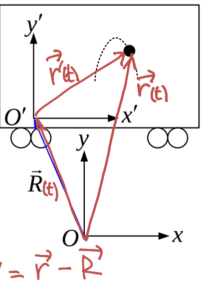
2次元の運動

- 放物運動
  - デカルト座標系のx方向は等速度運動、
    y方向は等加速度運動
  - 各次元を別々に解けば良い。
  - 積分定数は 2階×2次元 で4つ
  - 速さ一定で射出角度を変えたら？
- （斜面の滑降、円運動、振子運動）
  - 9~10回目あたりでまた触れます。

相対運動とガリレイ変換

相互に並進運動する座標系

- 互いに並進運動する
  座標系 O、O'
  - それぞれデカルト座標
    系を置く
  - 「基準ベクトル」は両方
    の座標系で共通で、時
    間によらず不変
- 両座標系から見た物
  体の位置ベクトルは:



$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R}$

ガリレイ変換（ガリレオ変換）

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{R}(t)$$

$$\frac{d\vec{r}'(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} - \frac{d\vec{R}(t)}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{V}(t)$$

- 物体の位置を、相互に運動する座標系で測ると:
  - O' 系での位置ベクトルは、O系での位置ベクトルから相対ベクトルを引いたもの
  - O' 系での速度ベクトルは、…（以下同）
- 位置・速度は足し算が可能、という主張

ガリレイ変換における運動方程式（1）

相対速度 $\vec{V}(t)$ が時間によらない定数 $\vec{V}_0$ なら:

$$\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{V}_0 \Rightarrow \frac{d\vec{v}'(t)}{dt} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} - \frac{d\vec{V}_0}{dt} = 0$$

O系の加速度 O'の〃

よって $\vec{a}'(t) = \vec{a}(t)$。

力 $\vec{F}$ の表現は両座標系で不変なので、 $\vec{F} = \vec{F}'$

$$\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F}' = m\vec{a}'$$

互いに等速運動する2つの座標系では、「運動方程式」の形が等しい

相対運動と慣性系

- ニュートンの第二法則:
  - 「物体に力が加わると、（慣性系から観測すると）物体には力に比例する加速度が加わる」
  - 逆に言うと、第二法則が成立するのが慣性系
- 慣性系に対して等速で運動している座標系も、また慣性系（ガリレイの相対性原理）

余談：特殊相対論

- ガリレイ変換では速度の和が成立するはず
- しかし、（相対運動する）どんな座標系で測っても光速は不変←実験事実

↓

- 自然の記述としてガリレイ変換は（およびこれを基にしたニュートン力学は）不適切、という結論になる。
- 「各座標系で時間の流れが一定」という前提を否定して構築されたのが特殊相対論。ここではローレンツ変換が適用される。
- ニュートン力学は v<<c で特殊相対論の良い近似
- ただし電磁気学では低速でもローレンツ変換が必要

ガリレイ変換における運動方程式（2）

（＝加速度運動）

相対速度 $\vec{V}(t)$ が時間によって変化すると:

$$\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{V}(t) \Rightarrow \frac{d\vec{v}'(t)}{dt} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} - \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$

O' O

よって $\vec{a}'(t) = \vec{a}(t) - \vec{A}(t)$ ←OからO'

$\vec{F} = \vec{F}'$

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}' = m\vec{a}' + m\vec{A}(t)$$

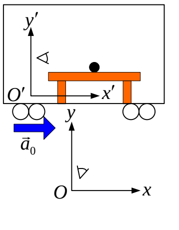
←第二法則とちがう。

Oが慣性系

慣性系Oに対して加速度運動する座標系O'では、第二法則が成立しない→非慣性系

「慣性力」

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{A}(t)$$

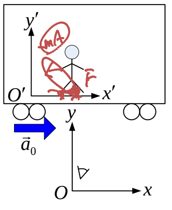


- 慣性系に対して加速度運動する座標系での「運動方程式」に表われる、力の次元を持つ項
  - 電車の発車・停止の際に感じる力
  - 自動車でカーブを曲がる（「加速度運動」）するときに感じる力

各座標系からの運動の解釈

O系：$m\vec{a}_0 = \vec{F}$
その人が踏ん張る力の反作用力で加速

O'系：$\vec{0} = \vec{F} - m\vec{a}_0$
踏ん張る力の反作用力と慣性力との釣り合い



回転する座標系における慣性力

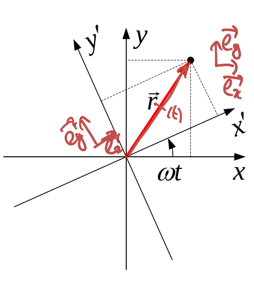
回転する座標系での慣性力

- 慣性系 O に対し、等角速度で回転する座標系 O' を取る。(x, y)
- 原点は両座標系で同一

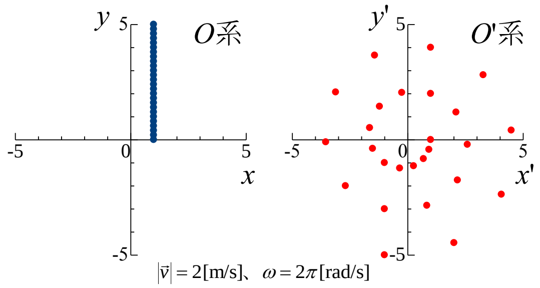
原点が共通なので $\vec{r} = \vec{r}'$ だけど、成分表現は異なる

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = x'\vec{e}_x' + y'\vec{e}_y'$$

(極座標系だとさらに $\vec{e}_r = \vec{e}_r'$ となる：後述)



O系での等速直線運動は:



$|\vec{v}| = 2$[m/s]、$\omega = 2\pi$[rad/s]

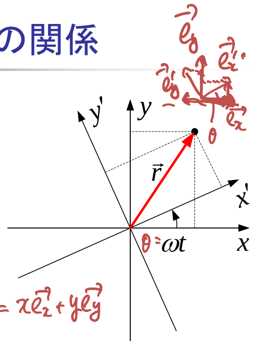
各座標の成分の関係

基準ベクトル

$$\vec{e}_x' = \vec{e}_x \cos\omega t + \vec{e}_y \sin\omega t$$
$$\vec{e}_y' = -\vec{e}_x \sin\omega t + \vec{e}_y \cos\omega t$$

$$\vec{r} = x'\vec{e}_x' + y'\vec{e}_y'$$
$$= x'\left(\vec{e}_x \cos\omega t + \vec{e}_y \sin\omega t\right) + y'\left(-\vec{e}_x \sin\omega t + \vec{e}_y \cos\omega t\right)$$
$$= \left(x'\cos\omega t - y'\sin\omega t\right)\vec{e}_x + \left(x'\sin\omega t + y'\cos\omega t\right)\vec{e}_y = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$$

よって
$$x = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t$$
$$y = x'\sin\omega t + y'\cos\omega t$$



力のベクトルと運動方程式

$x = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t$, $y = x'\sin\omega t + y'\cos\omega t$ と同様に考えて $F_x = F_x'\cos\omega t - F_y'\sin\omega t$, $F_y = F_x'\sin\omega t + F_y'\cos\omega t$

慣性系での運動方程式は

$m\dfrac{dx^2}{dt^2} = F_x$、$m\dfrac{dy^2}{dt^2} = F_y$ O系 なので、これに代入する。

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt}\cos\omega t - \omega x'\sin\omega t - \frac{dy'}{dt}\sin\omega t - \omega y'\cos\omega t$$
$$= \left(\frac{dx'}{dt} - \omega y'\right)\cos\omega t - \left(\frac{dy'}{dt} + \omega x'\right)\sin\omega t$$

力のベクトルと運動方程式(続)

$$\frac{dx}{dt}=\left(\frac{dx'}{dt}-\omega y'\right)\cos\omega t-\left(\frac{dy'}{dt}+\omega x'\right)\sin\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\left(\frac{d^2x'}{dt^2}-\omega\frac{dy'}{dt}\right)\cos\omega t-\omega\left(\frac{dx'}{dt}-\omega y'\right)\sin\omega t$$

$$-\left(\frac{d^2y'}{dt^2}+\omega\frac{dx'}{dt}\right)\sin\omega t-\omega\left(\frac{dy'}{dt}+\omega x'\right)\cos\omega t$$

$$=\left(\frac{d^2x'}{dt^2}-2\omega\frac{dy'}{dt}-\omega^2x'\right)\cos\omega t-\left(\frac{d^2y'}{dt^2}+2\omega\frac{dx'}{dt}-\omega^2y'\right)\sin\omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{F_x}{m}=\frac{F'_x}{m}\cos\omega t-\frac{F'_y}{m}\sin\omega t$$

力のベクトルと運動方程式(三)

yについても同様に計算して、結局

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\left(\frac{d^2x'}{dt^2}-2\omega\frac{dy'}{dt}-\omega^2x'\right)\cos\omega t-\left(\frac{d^2y'}{dt^2}+2\omega\frac{dx'}{dt}-\omega^2y'\right)\sin\omega t \quad ①$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\left(\frac{d^2x'}{dt^2}-2\omega\frac{dy'}{dt}-\omega^2x'\right)\sin\omega t+\left(\frac{d^2y'}{dt^2}+2\omega\frac{dx'}{dt}-\omega^2y'\right)\cos\omega t \quad ②$$

一方、

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{F_x}{m}=\frac{F'_x}{m}\cos\omega t-\frac{F'_y}{m}\sin\omega t \quad ①'$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{F_y}{m}=\frac{F'_x}{m}\sin\omega t+\frac{F'_y}{m}\cos\omega t \quad ②'$$ なので…

①＝①'

②＝②'

①×cosωt＋②×sinωt

①×(−sinωt)＋②×cosωt

よってO'系での運動方程式は

慣性力

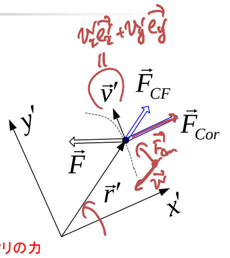
$$m\frac{d^2x'}{dt^2}=F'_x+2m\omega\frac{dy'}{dt}+m\omega^2x'$$

$$m\frac{d^2y'}{dt^2}=F'_y-2m\omega\frac{dx'}{dt}+m\omega^2y'$$

$$m\frac{d^2\vec r'}{dt^2}=\vec F+\vec F_{Cor}+\vec F_{CF}$$

ただし $\begin{cases}\vec F_{Cor}=2m\omega\left(v'_y\vec e'_x-v'_x\vec e'_y\right) & \text{コリオリの力}\\ \vec F_{CF}=m\omega^2\left(x'\vec e'_x+y'\vec e'_y\right) & \text{遠心力}\end{cases}$

$\vec r'\ (=\vec r)$



極座標系での導出

$r=r',\quad \theta=\theta'+\omega t$

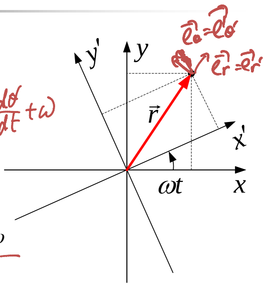
$F_r=F'_r,\quad F_\theta=F'_\theta$

$\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\theta'}{dt}+\omega$

$$v_r=\frac{dr}{dt}=\frac{dr'}{dt}=v'_r$$

$$v_\theta=r\frac{d\theta}{dt}=r\frac{d\theta'}{dt}+r\omega=v'_\theta+r'\omega$$

$r=r'$



極座標系での導出(続)

$\frac{dr}{dt}=\frac{dr'}{dt}$

$\frac{d^2r}{dt^2}=\frac{d^2r'}{dt^2}$

$\frac{d\theta}{dt}=\frac{d\theta'}{dt}+\omega$

$\frac{d^2\theta}{dt^2}=\frac{d^2\theta'}{dt^2}$

$$a_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{d^2r'}{dt^2}-r'\left(\frac{d\theta'}{dt}+\omega\right)^2$$

$$=\frac{d^2r'}{dt^2}-r'\left(\frac{d\theta'}{dt}\right)^2-2\omega r'\frac{d\theta'}{dt}-r'\omega^2=a'_r-2\omega v'_\theta-r'\omega^2$$

$$a_\theta=r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}=r'\frac{d^2\theta'}{dt^2}+2\frac{dr'}{dt}\left(\frac{d\theta'}{dt}+\omega\right)$$

$$=r'\frac{d^2\theta'}{dt^2}+2\frac{dr'}{dt}\frac{d\theta'}{dt}+2\omega\frac{dr'}{dt}=a'_\theta+2\omega v'_r$$

極座標系での導出(続々)

$F_r=F'_r$

$F_\theta=F'_\theta$

$ma_r=F_r$

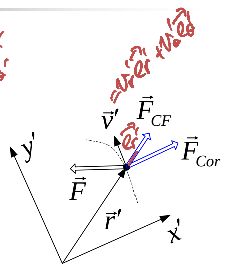
$\Rightarrow ma'_r=F'_r+2m\omega v'_\theta+mr'\omega^2$

$ma_\theta=F_\theta$

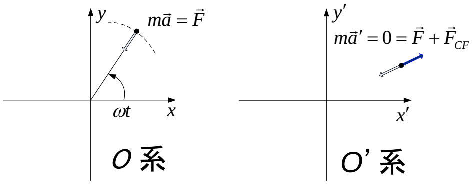
$\Rightarrow ma'_\theta=F'_\theta-2m\omega v'_r$

$\vec F_{CF}=mr'\omega^2\vec e_r'$

$\vec F_{Cor}=2m\omega\left(v'_\theta\vec e_r'-v'_r\vec e_\theta'\right)$



遠心力の解釈



コリオリの力の解釈