物理学Ⅰ（力学）6 回目：相対運動・非慣性系

中野武雄
2012年5月15日

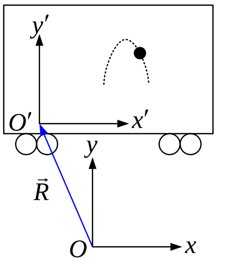
今日の内容

- 前回のおさらい
- 相対運動
  - ガリレイ変換
  - 並進運動における慣性系・非慣性系
  - 慣性力
- 回転する座標系
  - 運動方程式の変換（デカルト座標版・極座標版）
  - 慣性力→遠心力・コリオリの力

相対運動とガリレイ変換

相互に並進運動する座標系

- 互いに並進運動する座標系 *O*、*O’*
  - それぞれデカルト座標系を置く
  - 「基準ベクトル」は両方の座標系で共通で、時間によらず不変
- 両座標系から見た物体の位置ベクトルは：



ガリレイ変換（ガリレオ変換）

$$\vec{r}'(t) = \vec{r}(t) - \vec{R}(t)$$

$$\frac{d\vec{r}'(t)}{dt} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} - \frac{d\vec{R}(t)}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{V}(t)$$

- 物体の位置を、相互に運動する座標系で測ると：
  - O’ 系での位置ベクトルは、O系での位置ベクトルから相対ベクトルを引いたもの
  - O’ 系での速度ベクトルは、…（以下同）
- 位置・速度は足し算が可能、という主張

ガリレイ変換における運動方程式（1）

相対速度 $\vec{V}(t)$ が時間によらない定数 $\vec{V}_0$ なら：

$$\vec{v}'(t) = \vec{v}(t) - \vec{V}_0 \Rightarrow \frac{d\vec{v}'(t)}{dt} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} - \frac{d\vec{V}_0}{dt}$$

よって $\vec{a}'(t) = \vec{a}(t)$。

力 $\vec{F}$ の表現は両座標系で不変なので、

$$\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow \vec{F}' = m\vec{a}'$$

互いに等速運動する2つの座標系では、「運動方程式」の形が等しい

相対運動と慣性系

- ニュートンの第二法則：
  - 「物体に力が加わると、（慣性系から観測すると）物体には力に比例する加速度が加わる」
  - 逆に言うと、第二法則が成立するのが慣性系

- 慣性系に対して等速で運動している座標系も、また慣性系（ガリレイの相対性原理）

余談：特殊相対論

- ガリレイ変換では速度の和が成立するはず
- しかし、（相対運動する）どんな座標系で測っても光速は不変←実験事実

↓

- 自然の記述としてガリレイ変換は（およびこれを基にしたニュートン力学は）不適切、という結論になる。
- 「各座標系で時間の流れが一定」という前提を否定して構築されたのが特殊相対論。ここではローレンツ変換が適用される。

- ニュートン力学は v<<c で特殊相対論の良い近似
- ただし電磁気学では低速でもローレンツ変換が必要

ガリレイ変換における運動方程式（2）

相対速度$\vec{V}(t)$が時間によって変化すると:

$$\vec{v}'(t)=\vec{v}(t)-\vec{V}(t) \Rightarrow \frac{d\vec{v}'(t)}{dt}=\frac{d\vec{v}(t)}{dt}-\frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$

よって $\vec{a}'(t)=\vec{a}(t)-\vec{A}(t)$

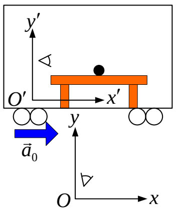
$$\vec{F}=m\vec{a} \Rightarrow \vec{F}'=m\vec{a}'+m\vec{A}(t)$$

慣性系Oに対して加速度運動する座標系O'では、第二法則が成立しない→非慣性系

「慣性力」

$$m\vec{a}'=\vec{F}-\underline{m\vec{A}(t)}$$

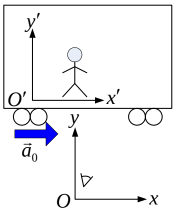
- 慣性系に対して加速度運動する座標系での「運動方程式」に表われる、力の次元を持つ項
  - 電車の発車・停止の際に感じる力
  - 自動車でカーブを曲がる（「加速度運動」）するときに感じる力



各座標系からの運動の解釈

O系：$m\vec{a}_0=\vec{F}$
その人が踏ん張る力の反作用力で加速

O'系：$\vec{0}=\vec{F}-m\vec{a}_0$
踏ん張る力の反作用力と慣性力との釣り合い



回転する座標系における慣性力

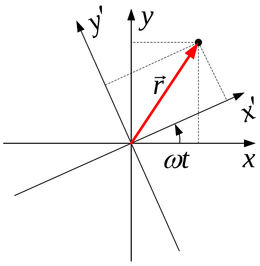
回転する座標系での慣性力

- 慣性系Oに対し、等角速度で回転する座標系 O' を取る。
- 原点は両座標系で同一

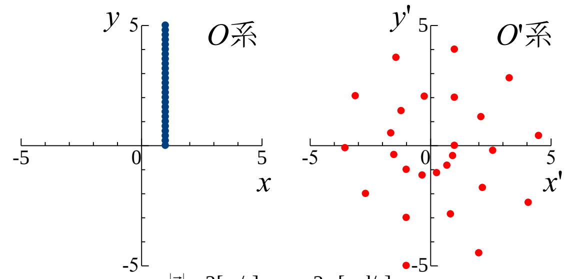
原点が共通なので$\vec{r}=\vec{r}'$ だけど、成分表現は異なる

$$\vec{r}=x\vec{e}_x+y\vec{e}_y=x'\vec{e}_x'+y'\vec{e}_y'$$

(極座標系だとさらに$\vec{e}_r=\vec{e}_r'$となる：後述)



O系での等速直線運動は:



$|\vec{v}|=2$[m/s]、$\omega=2\pi$[rad/s]

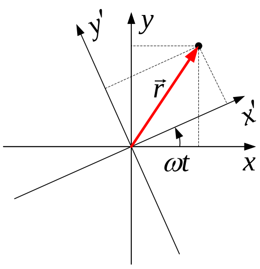
各座標の成分の関係

基準ベクトル

$$\vec{e}_x'=\vec{e}_x\cos\omega t+\vec{e}_y\sin\omega t$$
$$\vec{e}_y'=-\vec{e}_x\sin\omega t+\vec{e}_y\cos\omega t$$

$$\begin{aligned}\vec{r}&=x'\vec{e}_x'+y'\vec{e}_y'\\&=x'(\vec{e}_x\cos\omega t+\vec{e}_y\sin\omega t)+\\&\quad y'(-\vec{e}_x\sin\omega t+\vec{e}_y\cos\omega t)\\&=(x'\cos\omega t-y'\sin\omega t)\vec{e}_x+\\&\quad(x'\sin\omega t+y'\cos\omega t)\vec{e}_y\end{aligned}$$

よって
$$x=x'\cos\omega t-y'\sin\omega t$$
$$y=x'\sin\omega t+y'\cos\omega t$$



力のベクトルと運動方程式

$x=x'\cos\omega t-y'\sin\omega t$, $y=x'\sin\omega t+y'\cos\omega t$ と同様に考えて $F_x=F_x'\cos\omega t-F_y'\sin\omega t$, $F_y=F_x'\sin\omega t+F_y'\cos\omega t$

慣性系での運動方程式は

$m\dfrac{dx^2}{dt^2}=F_x$、 $m\dfrac{dy^2}{dt^2}=F_y$ なので、これに代入する。

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{dx'}{dt}\cos\omega t-\omega x'\sin\omega t-\frac{dy'}{dt}\sin\omega t-\omega y'\cos\omega t\\&=\left(\frac{dx'}{dt}-\omega y'\right)\cos\omega t-\left(\frac{dy'}{dt}+\omega x'\right)\sin\omega t\end{aligned}$$

力のベクトルと運動方程式(続)

$$\frac{dx}{dt}=\left(\frac{dx'}{dt}-\omega y'\right)\cos\omega t-\left(\frac{dy'}{dt}+\omega x'\right)\sin\omega t$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}&=\left(\frac{d^2x'}{dt^2}-\omega\frac{dy'}{dt}\right)\cos\omega t-\omega\left(\frac{dx'}{dt}-\omega y'\right)\sin\omega t\\&\quad-\left(\frac{d^2y'}{dt^2}+\omega\frac{dx'}{dt}\right)\sin\omega t-\omega\left(\frac{dy'}{dt}+\omega x'\right)\cos\omega t\\&=\left(\frac{d^2x'}{dt^2}-2\omega\frac{dy'}{dt}-\omega^2x'\right)\cos\omega t-\left(\frac{d^2y'}{dt^2}+2\omega\frac{dx'}{dt}-\omega^2y'\right)\sin\omega t\end{aligned}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{F_x}{m}=\frac{F_x'}{m}\cos\omega t-\frac{F_y'}{m}\sin\omega t$$

力のベクトルと運動方程式(三)

yについても同様に計算して、結局

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\left(\frac{d^2x'}{dt^2}-2\omega\frac{dy'}{dt}-\omega^2x'\right)\cos\omega t-\left(\frac{d^2y'}{dt^2}+2\omega\frac{dx'}{dt}-\omega^2y'\right)\sin\omega t$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}=\left(\frac{d^2x'}{dt^2}-2\omega\frac{dy'}{dt}-\omega^2x'\right)\sin\omega t+\left(\frac{d^2y'}{dt^2}+2\omega\frac{dx'}{dt}-\omega^2y'\right)\cos\omega t$$

一方、

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{F_x}{m}=\frac{F_x'}{m}\cos\omega t-\frac{F_y'}{m}\sin\omega t$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{F_y}{m}=\frac{F_x'}{m}\sin\omega t+\frac{F_y'}{m}\cos\omega t$$ なので…

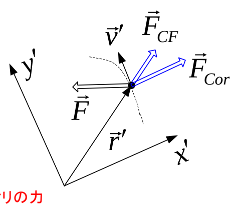
よってO’系での運動方程式は

$$m\frac{d^2x'}{dt^2}=F'_x+2m\omega\frac{dy'}{dt}+m\omega^2x'$$

$$m\frac{d^2y'}{dt^2}=F'_y-2m\omega\frac{dx'}{dt}+m\omega^2y'$$

$$m\frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2}=\vec{F}+\vec{F}_{Cor}+\vec{F}_{CF}$$

ただし $\begin{cases}\vec{F}_{Cor}=2m\omega\left(v'_y\vec{e}\,'_x-v'_x\vec{e}\,'_y\right) & \text{コリオリの力}\\ \vec{F}_{CF}=m\omega^2\left(x'\vec{e}\,'_x+y'\vec{e}\,'_y\right) & \text{遠心力}\end{cases}$



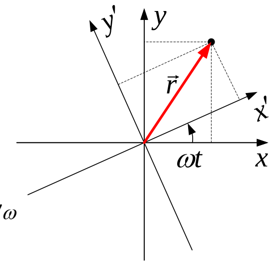
極座標系での導出

$r=r',\quad \theta=\theta'+\omega t$

$F_r=F'_r,\quad F_\theta=F'_\theta$

$$v_r=\frac{dr}{dt}=\frac{dr'}{dt}=v'_r$$

$$v_\theta=r\frac{d\theta}{dt}=r\frac{d\theta'}{dt}+r\omega=v'_\theta+r'\omega$$



極座標系での導出（続）

$$a_r=\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{d^2r'}{dt^2}-r'\left(\frac{d\theta'}{dt}+\omega\right)^2$$

$$=\frac{d^2r'}{dt^2}-r'\left(\frac{d\theta'}{dt}\right)^2-2\omega r'\frac{d\theta'}{dt}-r'\omega^2=a'_r-2\omega v'_\theta-r'\omega^2$$

$$a_\theta=r\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}=r'\frac{d^2\theta'}{dt^2}+2\frac{dr'}{dt}\left(\frac{d\theta'}{dt}+\omega\right)$$

$$=r'\frac{d^2\theta'}{dt^2}+2\frac{dr'}{dt}\frac{d\theta'}{dt}+2\omega\frac{dr'}{dt}=a'_\theta+2\omega v'_r$$

極座標系での導出（続々）

$ma_r=F_r$

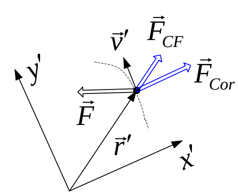
$\Rightarrow ma'_r=F'_r+2m\omega v'_\theta+mr'\omega^2$

$ma_\theta=F_\theta$

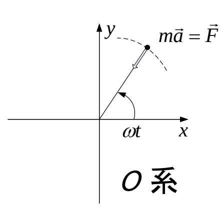
$\Rightarrow ma'_\theta=F'_\theta-2m\omega v'_r$

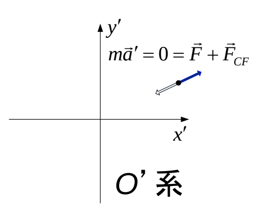
$\vec{F}_{CF}=mr'\omega^2\vec{e}_r\,'$

$\vec{F}_{Cor}=2m\omega\left(v'_\theta\,\vec{e}_r\,'-v'_r\,\vec{e}_\theta\,'\right)$



遠心力の解釈





コリオリの力の解釈