物理学 I（力学）7 回目：仕事とエネルギー (1)

中野武雄

2011年5月22日

5回目課題の解答(1-A)

Q: ばね定数k =10[N/m] のばねに質量1.0 [kg] の物体をつないだ。発生する単振動の角周波数・周波数を求めよ。振動の周期も求めよ。

A: 運動方程式 $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ の解 $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ において、角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{10[\mathrm{kg/s^2}]}{1.0[\mathrm{kg}]}} = 3.16[\mathrm{s^{-1}}]$

振動数 $f = \frac{\omega}{2\pi} = 0.50[\mathrm{s^{-1}}]$

周期 $T = \frac{1}{f} = 2.0[\mathrm{s}]$

$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$　$\omega^2 = \frac{k}{m}$　$[\mathrm{rad/s}]$

5回目課題の解答(1-B)

Q: 物体を釣り合いの位置から 10 [cm] 移動して手を離した場合、その後の振動における最大速度を求めよ。

A: 初期条件は $t = 0$において $x_0 = 0.10[\mathrm{m}]$、$v_0 = 0[\mathrm{m/s}]$

一般解 $x = A\cos\omega t + B\sin\omega t$ より $x_0 = A$

また　$v = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t$ より $v_0 = \omega B$

よってこの運動の解は $x = x_0\cos\omega t$ で、このとき

最大速度は $\omega x_0 = 3.16[\mathrm{s^{-1}}]\times 0.10[\mathrm{m}] = 0.32[\mathrm{m/s}]$

$ma = kx$　$v(t) = \omega x_0 \sin\omega t$

5回目課題の解答(1-C)

Q: 物体を釣り合いの位置から 5.0 [cm] 移動し、釣り合いから離れる方向に1.0 [m/s] で打ち出した。その後の振動における振幅を求めよ。

A:

初期条件は $t = 0$において $x_0 = 5.0\times10^{-2}[\mathrm{m}]$、$v_0 = 1.0[\mathrm{m/s}]$

$x_0 = A$、$v_0 = \omega B$を使い、運動の解は

$x = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$。これを $x = C\sin(\omega t + \phi)$と置くと

振幅 $C = \sqrt{x_0{}^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{(5.0\times10^{-2}[\mathrm{m}])^2 + \left(\frac{1.0[\mathrm{m/s}]}{3.16[\mathrm{s^{-1}}]}\right)^2} = 0.32[\mathrm{m}]$

$\omega t + \phi = \pi$　$\sin(\omega t + \phi) = 0$

5回目課題の解答(1-D)

Q: Cの場合について、最初に釣り合いの位置に戻る時間を求めよ。。

A:

前問より $x(t) = x_0\cos\omega t + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$。

これを $x(t) = C\sin(\omega t + \phi)$ 変換すると、振幅 $C = 0.32[\mathrm{m}]$

位相 $\phi = \tan^{-1}\left(\frac{x_0\omega}{v_0}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5.0\times10^{-1}[\mathrm{m}]\times3.16[\mathrm{s^{-1}}]}{1.0[\mathrm{m/s}]}\right) = 0.157[\mathrm{rad}]$

$t > 0$ で最初に $x = C\sin(\omega t + \phi) = 0$となるのは $\omega t + \phi = \pi$

$t = \frac{\pi - \phi}{\omega} = 0.94[\mathrm{s}]$

$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right)$ $(B>0)$、$\tan^{-1}\left(\frac{A}{B}\right) + \pi$ $(B<0)$

3.1415 − 0.157 [rad] / 3.16 [rad/s]

5回目課題の解答(2)

Q: 10[m]の高さから、角度は上方45度(= π /4ラジアン)、速度は141[km/h]で物体を打ち出した。重力加速度は 9.8 [m/s²]とする。 物体が地面（高さ0 [m]）に落ちるまでの時間、落ちた点と打ち出した点との水平方向の距離を求めよ。

A: 放物運動の解 $x = v_{0x}t + x_0$、$y = \frac{1}{2}at^2 + v_{0y}t + y_0$ において、

$v_{0x} = v_{0y} = \frac{141[\mathrm{km/h}]}{\sqrt{2}} = \frac{39.167[\mathrm{m/s}]}{\sqrt{2}} = 27.70[\mathrm{m/s}]$、

$x_0 = 0[\mathrm{m}]$、$y_0 = 10[\mathrm{m}]$、$a = -9.8[\mathrm{m/s^2}]$

$y = 0$となる時間 $t = \frac{-v_{0y} \pm \sqrt{v_{0y}{}^2 - 2ay_0}}{a} = -0.341[\mathrm{s}], 5.99[\mathrm{s}]$

これを代入して $x = 27.70[\mathrm{m/s}]\times5.99[\mathrm{s}] = 166.0[\mathrm{m}] \sim 1.6\times10^2[\mathrm{m}]$

今日の内容

- これまでの話のふりかえりと前回のおさらい
- 「保存量」のまえふり
  - 仕事とエネルギー
  - 力積と運動量
  - 角運動量と力のモーメント
- 仕事とエネルギー
  - 運動方程式の「積分」？
  - ベクトルの内積と経路積分
  - エネルギー方程式

これまでの話の流れ(0)

- 物理量＝数値＆単位
  - 同じ単位の数値は和が取れる
  - 「物理量」の計算をする場合は、途中の計算式でも単位を省略しない
- 単位の変換
  - 同じ物理量を示す等式(例: 1[m]=100[cm])を作る
  - 「無次元の1」を表す表現をつくる
  - もとの式に「代入」すれば単位を整理できる

これまでの話の流れ(1)

- 運動の記述(1次元)
  - 位置の時間変化
  - 速度：位置の時間微分
  - 加速度：速度の時間微分
- 2次元での運動の記述
  - 位置ベクトルとベクトルの演算(和・差・スカラー倍)
  - ベクトルの微分→速度ベクトル、加速度ベクトル
  - 座標系とベクトルの成分表現：デカルト座標・極座標
  - 速度・加速度の成分表現

これまでの話の流れ(2)

- ニュートンの運動の法則
  - 第一法則：慣性の法則
  - 第二法則：運動の法則
  - 第三法則：作用反作用の法則
  - 「力は加速度に比例する。速度そのものとは無関係」
- 運動方程式を解く
  - 積分：微分の逆演算
  - 運動方程式は2階の微分方程式
    →2つの積分定数：初期条件などから決定

これまでの話の流れ(3)

- 基本的な運動
  - 1次元：等速度運動、等加速度運動、単振動
  - 2次元：放物運動、(円運動)
- 慣性系と慣性力
  - ガリレイ変換
  - 等速度運動する2座標系では運動方程式が等価
    →慣性系
  - 加速度系と慣性力
  - 回転系における慣性力：遠心力・コリオリの力

ガリレイ変換

互いに運動する座標系O、O'において：

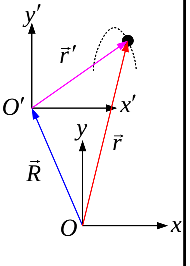
$\vec{R}$：Oから見たO'の原点の位置ベクトル

$\vec{r}$：　Oから見た運動物体の位置ベクトル

$\vec{r}'$：　O'から見た運動物体の位置ベクトル

$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{R} \quad \left(\Leftrightarrow \ \vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}\right)$

同様に　$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{V} \quad \left(\Leftrightarrow \ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}\right)$



相対運動と慣性系・慣性力

- 慣性系に対して等速運動している座標系は慣性系（ガリレイの相対性原理）

  相対速度が時間によらない定数 $\vec{V}_0$ なら

  $\vec{a}'(t) = \vec{a}(t)$。

  $\rightarrow\ m\vec{a} = \vec{F} \Leftrightarrow m\vec{a}' = \vec{F}'$

- 慣性系に対して加速度運動している座標は非慣性系 →運動方程式に「慣性力」の項が現れる

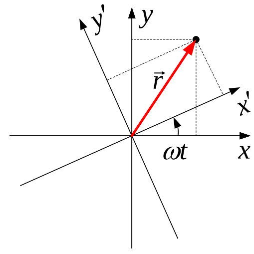
  相対速度 $\vec{V}(t)$ が時間によって変化すると:

  $\vec{a}'(t) = \vec{a}(t) - \vec{A}(t)$

  $\rightarrow\ m\vec{a} = \vec{F} \Rightarrow m\vec{a}' = \vec{F}' - m\vec{A}(t)$

回転する座標系での慣性力

- 慣性系 *O* に対し、等角速度で回転する座標系 *O'*。これも「加速度運動」してるので非慣性系
- デカルト座標系、極座標系による成分表現 →運動方程式に現れる「慣性力」の導出



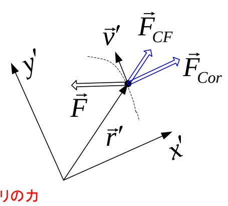
O'系での運動方程式

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = F'_x + 2m\omega\frac{dy'}{dt} + m\omega^2 x'$$

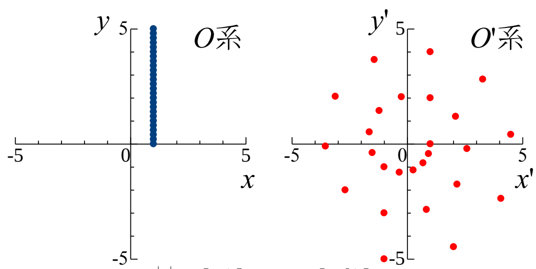
$$m\frac{d^2y'}{dt^2} = F'_y - 2m\omega\frac{dx'}{dt} + m\omega^2 y'$$

$$m\frac{d^2\vec{r}'}{dt^2} = \vec{F} + \vec{F}_{Cor} + \vec{F}_{CF}$$

ただし $\begin{cases} \vec{F}_{Cor} = 2m\omega\left(v'_y,\ -v'_x\right) & \text{コリオリの力} \\ \vec{F}_{CF} = m\omega^2\left(x',\quad y'\right) & \text{遠心力} \end{cases}$



O系での等速直線運動が…



$|\vec{v}| = 2[\text{m/s}]$、$\omega = 2\pi[\text{rad/s}]$

力学と保存量

保存量・保存則

- 微分方程式である運動方程式をいちいち解くのはたいへん
  - ある条件下においては、「時間によって変化しない物理量」が存在する
  - 時間 t_1 と t_2 で共通な物理量があれば、それをもとに代数的な計算が可能
- 保存量に対応して「保存則」
  - エネルギー保存則・運動量保存則・角運動量保存則

3つの保存量

- エネルギー
  - 質点系が受ける「仕事」が 0 なら変化しない
  - 保存力による仕事→全エネルギーの保存
  - ベクトルの「内積」と深く関わる
- 運動量
  - 質点系が受ける外力が 0 なら変化しない
  - 多体系で便利に使える
- 角運動量
  - 質点系が受ける「力のモーメント」が0なら変化しない
  - ベクトルの「外積」と深く関わる

余談：ネーターの定理

- 古典力学における座標と運動量の考え方を抽象化・高度化した「解析力学」の分野に進むと、保存量は時空間の対称性から導かれることが示される
  - エネルギー保存→時間の並進対称性
  - 運動量保存→空間の並進対称性
  - 角運動量保存→空間の回転対称性

仕事とエネルギー

話の流れ

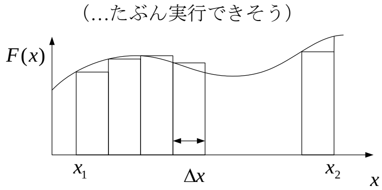
- 運動方程式を位置（経路）で積分
  →仕事と力学的エネルギー
  (運動方程式を時間で積分→力積&運動量)
  [illegible]
- 経路積分：力（ベクトル）と経路の微小区間（ベクトル）の「内積」の積分
- 今日は「内積」の定義から経路積分を経て、エネルギー方程式（力学的エネルギー保存則）まで。

運動方程式の積分（1次元）

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

$$\int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv}{dt}\,dx = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx$$

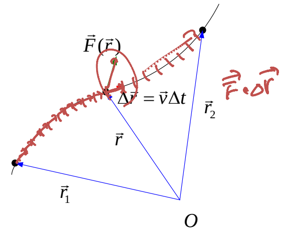
(…たぶん実行できそう)



2次元以上の場合は…？

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\frac{d\vec{v}}{dt} \ldots ?$$



ベクトルの内積と線積分

ベクトルの内積

自分との内積：

$\vec{A}\cdot\vec{A}=|\vec{A}|^2\left(=A^2\right)$

交換法則：

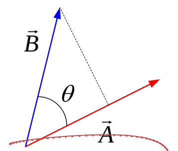
$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$

結合法則（スカラー倍）：

$\left(k\vec{A}\right)\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot\left(k\vec{B}\right)=k\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$

分配法則：

$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

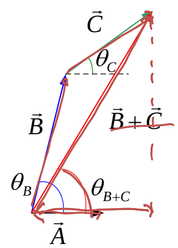


$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta}$

参考：内積の分配則

$|\vec{B}+\vec{C}|\cos\theta_{B+C}=|\vec{B}|\cos\theta_B+|\vec{C}|\cos\theta_C$

$\Rightarrow\vec{A}\cdot\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$



ベクトルの内積の成分表現

基準ベクトル $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$ を用いると：

$\left\{\begin{array}{l}\cdot\text{大きさが1}\\\cdot\text{互いに直交}\end{array}\right.$

$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1=0$

$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1=\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2=1$

成分表現

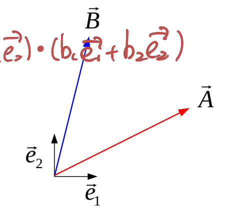
$\vec{A}\cdot\vec{B}=(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2)\cdot(b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2)$

$\vec{A}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2$

$\vec{B}=b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2$

に対して分配則を使えば、

$\vec{A}\cdot\vec{B}=a_1b_1+a_2b_2$



参考：余弦定理から成分表現

余弦定理から、

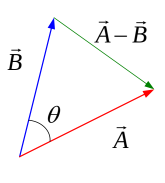
$|\vec{A}-\vec{B}|^2=|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2-2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$

$|\vec{A}|^2=a_1{}^2+a_2{}^2$ などを用いると、

$2\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}|^2+|\vec{B}|^2-|\vec{A}-\vec{B}|^2$

$=a_1{}^2+a_2{}^2+b_1{}^2+b_2{}^2-(a_1-b_1)^2-(a_2-b_2)^2$

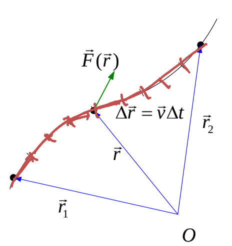
$=2a_1b_1+2a_2b_2$



経路積分（線積分）

$$\sum\vec{F}(\vec{r})\cdot\Delta\vec{r}\;\xrightarrow[\text{刻み目}\to\text{極小}]{}\;\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

（線積分の具体例は来週やります）



エネルギー方程式

運動方程式の積分

運動方程式

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}$$

の両辺を線積分する

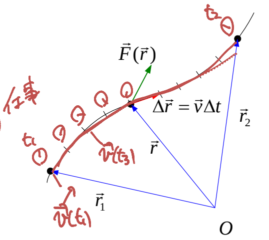
$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

仕事

左辺は置換積分する

$$d\vec{r}=\vec{v}\,dt \qquad \begin{array}{c|c} \vec{r} & \vec{r}_1\to\vec{r}_2 \\ \hline t & t_1\to t_2 \end{array}$$

$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$



エネルギー方程式

$\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v})=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}(t+\Delta t)\cdot\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)\cdot\vec{v}(t)}{\Delta t}$

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$\vec{r}_1=\vec{r}(t_1)$、$\vec{r}_2=\vec{r}(t_2)$となるようt_1、t_2を定め、

$d\vec{r}=\frac{d\vec{r}}{dt}dt=\vec{v}dt$を用いると、

$$左辺=\int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}dt$$

いま$\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v})=\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}=2\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}$より、

$$左辺=\int_{t_1}^{t_2}\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(|\vec{v}|^2\right)dt=\frac{1}{2}mv_2{}^2-\frac{1}{2}mv_1{}^2$$

$\begin{cases} v_2=|\vec{v}(t_2)| \\ v_1=|\vec{v}(t_1)| \end{cases}$

「仕事」の定義・「運動エネルギー」の定義

右辺$=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}\equiv W(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$と定義。

$$\Rightarrow\frac{1}{2}mv_2{}^2-\frac{1}{2}mv_1{}^2=W(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$$

$\frac{1}{2}mv^2$　：運動エネルギー

$W(\vec{r}_1,\vec{r}_2)$　：経路$\vec{r}_1\to\vec{r}_2$における仕事

- 「運動エネルギーの増加は、その間に質点に働いた力のなす仕事に等しい」

運動方程式の積分（1次元）

$$\int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv}{dt}dx=\int_{x_1}^{x_2}F\,dx$$

左辺で$dx=vdt$と置換する。$\begin{array}{c|c} x & x_1\to x_2 \\ \hline t & t_1\to t_2 \end{array}$

$$左辺=\int_{t_1}^{t_2} m\frac{dv}{dt}vdt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{1}{2}mv^2dt=\frac{1}{2}m\{v(t_2)\}^2-\frac{1}{2}m\{v(t_1)\}^2$$

$\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(v^2)$

右辺$=\int_{x_1}^{x_2}F\,dx$ は $W(x_1\to x_2)$と定義。

$\begin{array}{c|c} t & t_1\to t_2 \\ \hline v & v_1\to v_2 \end{array}$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}m\{v(t_2)\}^2-\frac{1}{2}m\{v(t_1)\}^2=W(x_1\to x_2)$$

$=\int_{v_1}^{v_2}mv\,dv=\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2$

運動方程式の積分（1次元）

$$\int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv}{dt}dx=\int_{x_1}^{x_2}F\,dx$$

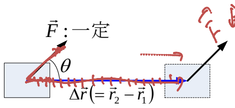
左辺で$dx=vdt$と置換する。$\begin{array}{c|c} x & x_1\to x_2 \\ \hline t & t_1\to t_2 \end{array}$

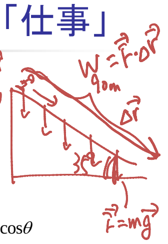
$$左辺=\int_{t_1}^{t_2} m\frac{dv}{dt}vdt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(v^2\right)dt=\frac{1}{2}m\{v(t_2)\}^2-\frac{1}{2}m\{v(t_1)\}^2$$

右辺$=\int_{x_1}^{x_2}F\,dx$ は $W(x_1\to x_2)$と定義。

$$\Rightarrow\frac{1}{2}m\{v(t_2)\}^2-\frac{1}{2}m\{v(t_1)\}^2=W(x_1\to x_2)$$

参考:一定の力で直線移動させるときの「仕事」



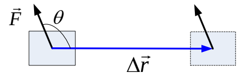


$$W=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\vec{F}\cdot\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}d\vec{r}$$

$$=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=\left|\vec{F}\right|\left|\Delta\vec{r}\right|\cos\theta$$

この値が$\vec{r}_2$と$\vec{r}_1$での運動エネルギーの差に等しい

余談:仕事が負の場合もある



$$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}\text{のとき}\cos\theta<0$$

$$\Rightarrow W(\vec{r}_1,\vec{r}_2)<0\Rightarrow\frac{1}{2}\vec{v}_2{}^2<\frac{1}{2}\vec{v}_1{}^2$$

- 加速度が速度と逆向き→減速過程に対応