物理学 I（力学）7 回目：仕事とエネルギー (1)

中野武雄

2011年5月22日

今日の内容

- これまでの話のふりかえりと前回のおさらい
- 「保存量」のまえふり
  - 仕事とエネルギー
  - 力積と運動量
  - 角運動量と力のモーメント
- 仕事とエネルギー
  - 運動方程式の「積分」？
  - ベクトルの内積と経路積分
  - エネルギー方程式

力学と保存量

保存量・保存則

- 微分方程式である運動方程式をいちいち解くのはたいへん
  - ある条件下においては、「時間によって変化しない物理量」が存在する
  - 時間 t_1 と t_2 で共通な物理量があれば、それをもとに代数的な計算が可能
- 保存量に対応して「保存則」
  - エネルギー保存則・運動量保存則・角運動量保存則

3つの保存量

- エネルギー
  - 質点系が受ける「仕事」が 0 なら変化しない
  - 保存力による仕事→全エネルギーの保存
  - ベクトルの「内積」と深く関わる
- 運動量
  - 質点系が受ける外力が 0 なら変化しない
  - 多体系で便利に使える
- 角運動量
  - 質点系が受ける「力のモーメント」が0なら変化しない
  - ベクトルの「外積」と深く関わる

余談：ネーターの定理

- 古典力学における座標と運動量の考え方を抽象化・高度化した「解析力学」の分野に進むと、保存量は時空間の対称性から導かれることが示される
  - エネルギー保存→時間の並進対称性
  - 運動量保存→空間の並進対称性
  - 角運動量保存→空間の回転対称性

仕事とエネルギー

話の流れ

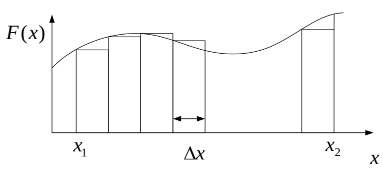
- 運動方程式を位置(経路)で積分
  →仕事と力学的エネルギー
  (運動方程式を時間で積分→力積&運動量)
- 経路積分:力(ベクトル)と経路の微小区間(ベクトル)の「内積」の積分
- 今日は「内積」の定義から経路積分を経て、エネルギー方程式(力学的エネルギー保存則)まで。

運動方程式の積分(1次元)

$$m\frac{dv}{dt}=F$$

$$\int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv}{dt}dx=\int_{x_1}^{x_2} F\,dx$$

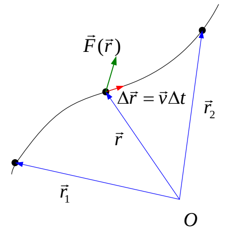
(…たぶん実行できそう)



2次元以上の場合は…?

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}$$

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\frac{d\vec{v}}{dt}\ldots?$$



ベクトルの内積と線積分

ベクトルの内積

自分との内積:

$$\vec{A}\cdot\vec{A}=\left|\vec{A}\right|^2\left(=A^2\right)$$

交換法則:

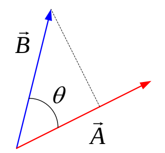
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$$

結合法則(スカラー倍):

$$\left(k\vec{A}\right)\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot\left(k\vec{B}\right)=k\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$$

分配法則:

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$

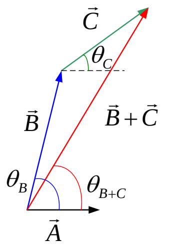


$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta$$

参考：内積の分配則

$$|\vec{B}+\vec{C}|\cos\theta_{B+C} = |\vec{B}|\cos\theta_B + |\vec{C}|\cos\theta_C$$

$$\Rightarrow \vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$$



ベクトルの内積の成分表現

基準ベクトル $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$ を用いると：

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2 = \vec{e}_2\cdot\vec{e}_1 = 0$$

$$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1 = \vec{e}_2\cdot\vec{e}_2 = 1$$

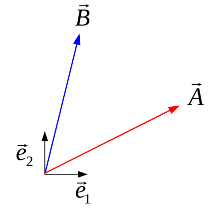
成分表現

$$\vec{A} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2$$

$$\vec{B} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2$$

に対して分配則を使えば、

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$



参考：余弦定理から成分表現

余弦定理から、

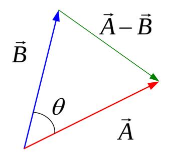
$$|\vec{A}-\vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

$|\vec{A}|^2 = a_1{}^2 + a_2{}^2$ などを用いると、

$$2\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - |\vec{A}-\vec{B}|^2$$

$$= a_1{}^2 + a_2{}^2 + b_1{}^2 + b_2{}^2 - (a_1-b_1)^2 - (a_2-b_2)^2$$

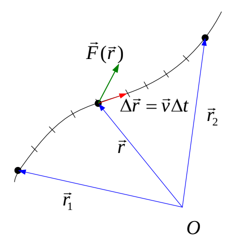
$$= 2a_1 b_1 + 2a_2 b_2$$



経路積分（線積分）

$$\sum \vec{F}(\vec{r})\cdot\Delta\vec{r} \underset{\text{刻み目}\to\text{極小}}{\longrightarrow} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

（線積分の具体例は来週やります）



エネルギー方程式

運動方程式の積分

運動方程式

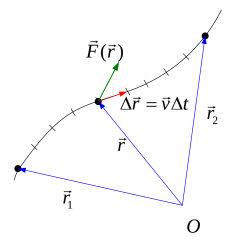
$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

の両辺を線積分する

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

左辺は置換積分する

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt \qquad \begin{array}{c|c} \vec{r} & \vec{r}_1 \to \vec{r}_2 \\ \hline t & t_1 \to t_2 \end{array}$$



エネルギー方程式

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$、$\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$となるようt_1、t_2を定め、

$d\vec{r} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}dt = \vec{v}dt$を用いると、

$$左辺 = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}dt$$

いま$\dfrac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \dfrac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\dfrac{d\vec{v}}{dt} = 2\dfrac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}$より、

$$左辺 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(|\vec{v}|^2\right)dt = \frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2$$

「仕事」の定義・「運動エネルギー」の定義

$右辺 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} \equiv W(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$と定義。

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = W(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

$\dfrac{1}{2}mv^2$　：運動エネルギー

$W(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$　：経路$\vec{r}_1 \to \vec{r}_2$における仕事

- 「運動エネルギーの増加は、その間に質点に働いた力のなす仕事に等しい」

運動方程式の積分（1次元）

$$\int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv}{dt}dx = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx$$

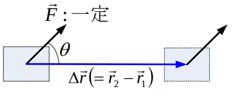
左辺で$dx = vdt$と置換する。$\begin{array}{c|c} x & x_1 \to x_2 \\ \hline t & t_1 \to t_2 \end{array}$

$$左辺 = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{dv}{dt}vdt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(v^2\right)dt = \frac{1}{2}m\{v(t_2)\}^2 - \frac{1}{2}m\{v(t_1)\}^2$$

$右辺 = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx$ は $W(x_1 \to x_2)$と定義。

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\{v(t_2)\}^2 - \frac{1}{2}m\{v(t_1)\}^2 = W(x_1 \to x_2)$$

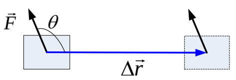
参考：一定の力で直線移動させるときの「仕事」



$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} d\vec{r}$$
$$= \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = \left|\vec{F}\right|\left|\Delta\vec{r}\right|\cos\theta$$

この値が$\vec{r}_2$と$\vec{r}_1$での運動エネルギーの差に等しい

余談：仕事が負の場合もある



$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$のとき$\cos\theta < 0$

$$\Rightarrow W(\vec{r}_1, \vec{r}_2) < 0 \Rightarrow \frac{1}{2}{\vec{v}_2}^2 < \frac{1}{2}{\vec{v}_1}^2$$

- 加速度が速度と逆向き→減速過程に対応