物理学Ⅰ　8 回目 2012-05-29　担当：中野武雄（nakano@st.seikei.ac.jp）

前回のおさらい

力学の保存量（保存則）のイントロとして、エネルギー・運動量・角運動量を紹介し、運動エネルギーを導くところまでをやりました。

エネルギー保存則は、運動方程式の両辺を物体の運動経路に沿って積分すると得られます。ベクトル量である運動方程式の両辺を、やはりベクトル量である位置座標で積分するために、ベクトルの「内積」および「線積分」の概念を導入しました。

運動方程式 $ma = F$ の左辺を線積分し、置換積分を施して積分変数を時間にすると、積分の結果は経路両端の速度の「大きさ」だけで決まります。ここで「運動エネルギー」を定義すると、経路両端でのこの値の変化が、力（右辺）の線積分である「仕事」に等しくなる、という関係が得られます。

今日の内容：仕事とエネルギー(2)

今日の話題は運動方程式の右辺の線積分（=仕事）についてです。仕事は一般には積分経路に依存しますが、ある条件を満たす力（の場）では、積分が経路に依存せず両端の位置だけで決まります。このような力を「保存力（場）」と呼びます。この場合、2 点間を移動したときの仕事が両点の位置だけで決まるので、基準点を設けることによって「位置エネルギー」が物体の位置のみの関数として定まります。この位置エネルギーと運動エネルギーとの和が保存される、というのが今日の話のゴールです。

物理学の問題で最も良く利用される保存力として、ばねの復元力、地上での重力、万有引力、という 3 つの例を紹介する予定です。具体的な線積分の計算の実行方法と合わせて、イメージを掴んでもらえればと思います。

今日の課題

1. 重力加速度 9.8 [m/s] のもと、地上（$y = 0$）から物体を 100 [km/h] で真上に投げ上げた。最高到達点では速度が 0 になることを利用して、到達点の高さを求めよ。
2. 100 [km/h]で、45 度上方に投げ上げた場合の到達点の高さを求めよ。このとき x 方向には等速度運動なので、最高到達点での速度は初速度の x 成分に等しいことを利用せよ（ヒント：5 回目の講義のスライドを参照）。
3. [やや難] 1 次元の単振動の運動方程式 $ma = -kx$ の解 $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$（ただし $\omega = \sqrt{k/m}$）において、あらゆる時間 t において位置エネルギーと運動エネルギーとの和が一定であることを示せ。
4. [難] 重力が $\vec{F} = -mg\vec{e}_y$ ($g = 9.8[\mathrm{m/s^2}]$) で与えられているとき、位置 $\vec{r}_1 = O$ （原点）から $\vec{r}_2 = (1.0[\mathrm{m}])\vec{e}_y$ まで移動した物体が、この重力から受ける仕事を考える。経路が (1) 直進、(2) 中心(0, 0.5 [m])、半径 0.5 [m] の円に沿って移動、のときそれぞれについて、仕事 W_1、W_2 を線積分を用いて計算し、両者が一致することを示せ。物体の質量は m =1.0 [kg] とせよ。(2) については図中のようなパラメータ θ を用いて積分を実行せよ (積分区間は $\theta = -\pi/2 \sim \pi/2$ となる)。