物理学Ⅰ（力学）８回目：仕事とエネルギー(2)

中野武雄

2012年5月29日

6回目課題の解答(1)

$v(t)=v_0+at$

$ma'=F-mA$

Q: F1マシンが、速度350 [km/h] から70 [km/h] までのブレーキングを2秒で行った。減速中の車の運動を等加速度直線運動と仮定し、ドライバーにかかる慣性力が重力の何倍か(何Gか)を求めよ。重力加速度は g=9.8 [m/s²] とせよ。

A: 慣性系から見た車系の加速度は、等加速度直線運動より

$$A=\frac{v(t)-v(0)}{t}=\frac{(70-350)[\mathrm{km/h}]}{2[\mathrm{s}]}\times\frac{1000[\mathrm{m}]}{1[\mathrm{km}]}\times\frac{1[\mathrm{h}]}{3600[\mathrm{s}]}$$

$$=-38.89[\mathrm{m/s^2}]$$

これによる慣性力 $-mA$ と重力 mg との比は

$$\frac{-A}{g}=\frac{38.89[\mathrm{m/s^2}]}{9.8[\mathrm{m/s^2}]}=3.968\sim 4 \text{ よって 4 倍}$$

6回目課題の解答(2)

Q: 地球の赤道を半径が 6.38×10³ [km] の円とみなし、自転の周期を 8.62×10⁴ [s] とする。地表の赤道上に静止している 1.0 [kg] の物体が受ける自転による遠心力を [N] 単位で求めよ。これは重力加速度 g による力 mg の何%か。

A:

$$\text{遠心力 } F_{CF}=mr\omega^2=1[\mathrm{kg}]\times 6.38\times10^6[\mathrm{m}]\times\left(\frac{2\pi}{8.62\times10^4[\mathrm{s}]}\right)^2$$

$$=0.03389[\mathrm{kg\,m/s^2}]\sim 3.4\times10^{-2}[\mathrm{N}]。$$

これと重力 $mg=1[\mathrm{kg}]\times9.8[\mathrm{m/s^2}]=9.8[\mathrm{kg\,m/s^2}]$ との比は

$$\frac{F_{CF}}{mg}=\frac{0.03389[\mathrm{N}]}{9.8[\mathrm{N}]}=0.003458\sim \text{よって}0.35\%。$$

6回目課題の解答(3)

Q: 2と同じ条件において、ある高さから地表に向けて物体を投げ降ろした。地表に衝突する直前の速度は、ちょうど地球の中心を向き、100 [km/h] であった。このときのコリオリの力の大きさを [N] 単位で求め、向きが地表での東西南北どちらか答えよ。

A: 回転系での（見かけの）運動方程式

$$ma'_x=F'_x+2m\omega v'_y+m\omega^2x'$$

$$ma'_y=F'_y-2m\omega v'_x+m\omega^2y'$$

いま物体の落ちる方向と平行に x' 軸を取れば、

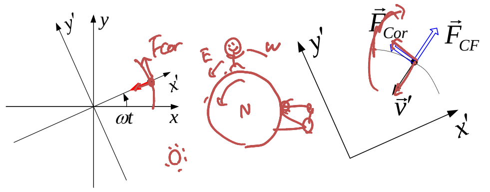
$v'_x=-100[\mathrm{km/h}]$、$v'_y=0$ より、コリオリの力の大きさは

$$\left|\vec{F}_{Cor}\right|=\left|-2m\omega v'_x\right|=2\times1.0[\mathrm{kg}]\times\frac{2\pi}{8.62\times10^4[\mathrm{s}]}\times\left(-27.778[\mathrm{m/s}]\right)$$

$$=4.0\dot{4}\dot{9}\times10^{-3}[\mathrm{kg\,m/s^2}]\sim 4.0[\mathrm{N}]$$

6回目課題の解答(3続)

地球の回転方向は、北極から見て時計と反対方向なので、6回目に考えた左図と同じ。このとき $\vec{F}_{Cor}=2m\omega(v'_y\,\vec{e}_x-v'_x\,\vec{e}_y)$ で、$v'_x<0$、$v'_y=0$ よりコリオリの力は θ' の増える向き → 東向き。



今日の内容

- 前回のおさらい
  - 力学における保存量
  - ベクトルの内積と経路積分
  - 運動方程式の経路積分～運動エネルギーと仕事
- 保存力と位置エネルギー
  - 保存力の定義
  - 位置エネルギー
  - 力学的エネルギーの保存則
  - 位置エネルギーの具体例
  - 束縛された運動：束縛力と位置エネルギー

3つの保存量

- エネルギー
  - 質点系が受ける「仕事」が 0 なら変化しない
  - 保存力による仕事→全エネルギーの保存
  - ベクトルの「内積」と深く関わる
- 運動量
  - 質点系が受ける外力が 0 なら変化しない
  - 多体系で便利に使える
- 角運動量
  - 質点系が受ける「力のモーメント」が0なら変化しない
  - ベクトルの「外積」と深く関わる

ベクトルの内積

自分との内積：

$\vec{A}\cdot\vec{A}=|\vec{A}|^2\left(=A^2\right)$

交換法則：

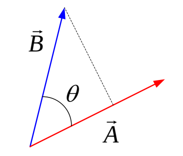
$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$

結合法則（スカラー倍）：

$\left(k\vec{A}\right)\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot\left(k\vec{B}\right)=k\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$

分配法則：

$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$



$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$

ベクトルの内積の成分表現

基準ベクトル $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$ を用いると：

$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1=0$

$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1=\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2=1$

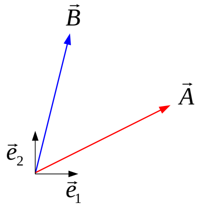
成分表現

$\vec{A}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2$

$\vec{B}=b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2$

に対して分配則を使えば、

$\vec{A}\cdot\vec{B}=a_1b_1+a_2b_2$



復習：経路積分（線積分）

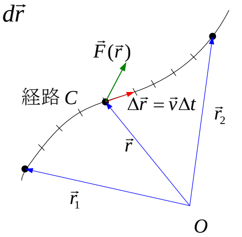
$$\sum\vec{F}(\vec{r})\cdot\Delta\vec{r}\ \underset{\text{刻み目→極小}}{\longrightarrow}\ \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

通常は経路に依存するので、

経路Cを意識する場合には

$$\int_{C(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

のようにも書く。



復習：運動方程式の経路積分

運動方程式

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}$$

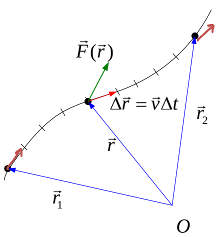
の両辺を線積分する

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

左辺は置換積分する

$d\vec{r}=\vec{v}\,dt$

$\vec{r}$	$\vec{r}_1\to\vec{r}_2$
t	$t_1\to t_2$



復習：エネルギー方程式

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$\vec{r}_1=\vec{r}(t_1)$、$\vec{r}_2=\vec{r}(t_2)$となるようt_1、t_2を定め、

$d\vec{r}=\frac{d\vec{r}}{dt}dt=\vec{v}dt$を用いると、

$$左辺=\int_{t_1}^{t_2}m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}dt$$

いま$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right)=\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}=2\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}$より、

$$左辺=\int_{t_1}^{t_2}\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(|\vec{v}|^2\right)dt=\frac{1}{2}m{v_2}^2-\frac{1}{2}m{v_1}^2$$

復習：「仕事」の定義・「運動エネルギー」の定義

右辺 $= \int_{\vec r_1}^{\vec r_2} \vec F \cdot d\vec r \equiv W(\vec r_1, \vec r_2)$ と定義。

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = W(\vec r_1, \vec r_2)$$

$\frac{1}{2}mv^2$　：運動エネルギー

$W(\vec r_1, \vec r_2)$　：経路 $\vec r_1 \to \vec r_2$ における仕事

- 「運動エネルギーの増加は、その間に質点に働いた力のなす仕事に等しい」

運動方程式の積分（1次元）

$$\int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv}{dt}dx = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx$$

左辺で $dx = vdt$ と置換する。 $\begin{array}{c|c} x & x_1 \to x_2 \\ \hline t & t_1 \to t_2 \end{array}$

左辺 $= \int_{t_1}^{t_2} m\frac{dv}{dt}vdt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2}\frac{d}{dt}(v^2)dt = \frac{1}{2}m\{v(t_2)\}^2 - \frac{1}{2}m\{v(t_1)\}^2$

右辺 $= \int_{x_1}^{x_2} F\,dx$ は $W(x_1 \to x_2)$ と定義。

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\{v(t_2)\}^2 - \frac{1}{2}m\{v(t_1)\}^2 = W(x_1 \to x_2)$$

余談：再び置換？

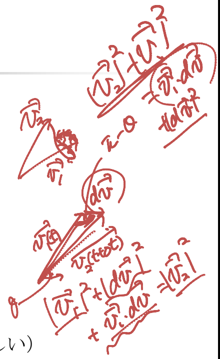
$$\int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv}{dt}dx = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx$$

左辺 $= \int_{t_1}^{t_2} m\frac{dv}{dt}vdt$

再び $dv = \frac{dv}{dt}dt$ と置換する。 $\begin{array}{c|c} t & t_1 \to t_2 \\ \hline v & v_1 \to v_2 \end{array}$

すると左辺 $= \int_{v_1}^{v_2} mvdv = \left[m\frac{1}{2}v^2\right]_{v_1}^{v_2}$

2次元以上では $\int_{\vec v_1}^{\vec v_2} m\vec v \cdot d\vec v$ ？（多分正しい）



参考：関数の積の微分

$$\frac{d}{dt}(f(t)g(t))$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left\{\frac{f(t+\Delta t)g(t+\Delta t) - f(t)g(t)}{\Delta t}\right\}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left\{f(t+\Delta t)\frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t} + \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}g(t)\right\}$$
$$= f(t)\frac{dg(t)}{dt} + \frac{df(t)}{dt}g(t)$$

参考：ベクトルの内積の微分

$$\frac{d}{dt}(\vec a(t)\cdot\vec b(t))$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left\{\frac{\vec a(t+\Delta t)\cdot\vec b(t+\Delta t) - \vec a(t)\cdot\vec b(t)}{\Delta t}\right\}$$
$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left\{\vec a(t+\Delta t)\cdot\left(\frac{\vec b(t+\Delta t) - \vec b(t)}{\Delta t}\right) + \left(\frac{\vec a(t+\Delta t) - \vec a(t)}{\Delta t}\right)\cdot\vec b(t)\right\}$$
$$= \vec a(t)\cdot\frac{d\vec b(t)}{dt} + \frac{d\vec a(t)}{dt}\cdot\vec b(t)$$

「仕事」の計算

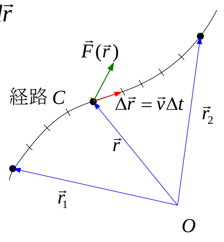
復習:経路積分(線積分)

$$\sum \vec{F}(\vec{r})\cdot\Delta\vec{r} \underset{\text{刻み目→極小}}{\longrightarrow} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

通常は経路に依存するので、
経路Cを意識する場合には

$$\int_{C(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

のようにも書く。



逆向きの経路積分は符号が反転

経路を逆向きに辿るとき、

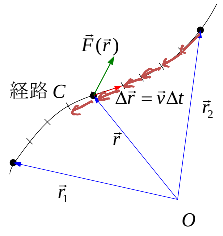
$$W_{C(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)} = \int_{C(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= -\int_{C(\vec{r}_2\to\vec{r}_1)}\vec{F}\cdot d\vec{r} = -W_{C(\vec{r}_2\to\vec{r}_1)}$$

なぜなら

$$\int_{C(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \lim_{\text{刻み目}\to 0}\sum\vec{F}(\vec{r})\cdot\Delta\vec{r}_i$$

$$\int_{C(\vec{r}_2\to\vec{r}_1)}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \lim_{\text{刻み目}\to 0}\sum\vec{F}(\vec{r})\cdot(-\Delta\vec{r}_i)$$



$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y$

成分を用いた線積分の計算

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\vec{v}dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(F_x\frac{dx}{dt}+F_y\frac{dy}{dt}\right)dt$$

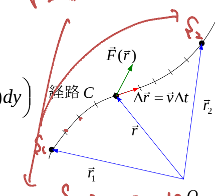
$\vec{r} = (x(s), y(s))$

$$= \int_{t_1}^{t_2}F_x\frac{dx^{(t)}}{dt}dt + \int_{t_1}^{t_2}F_y\frac{dy^{(t)}}{dt}dt$$

$$\left(= \int_{x_1}^{x_2}F_x(x,y(x))dx + \int_{y_1}^{y_2}F_y(x(y),y)dy\right)$$

なおt は $\vec{r}=x(t)\vec{e}_x+y(t)\vec{e}_y$ を定めれば良い
のであって、必ずしも実際の時間そのもの
でなくても良い。同様に二次元極座標なら

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2}F_r\frac{dr}{dt}dt + \int_{t_1}^{t_2}F_\theta r\frac{d\theta}{dt}dt$$



$W = \int_{S_1}^{S_2}\vec{F}(s)\cdot\vec{r}'(s)ds = \int_{S_1}^{S_2}\left(F_x\frac{dx}{ds}+F_y\frac{dy}{ds}\right)ds$

課題4のヒント

経路2はθを用いて

$x(\theta)=r\cos\theta,\ y(\theta)=r\sin\theta+r$

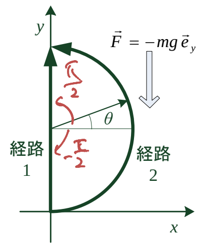
と表せる。 よって

$$\frac{dx}{d\theta}=-r\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=r\cos\theta$$

これを用いて

$$W_2=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(F_x\frac{dx}{d\theta}+F_y\frac{dy}{d\theta}\right)d\theta$$

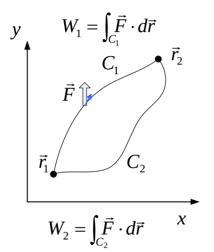
の積分を実行すれば良い。



保存力と位置エネルギー

保存力

- 一般には2点間を質点が移動するとき、その仕事は経路に依存する
- 特定の条件を満たす場合、経路に依存せずに2点の位置だけで仕事が決まる
→保存力



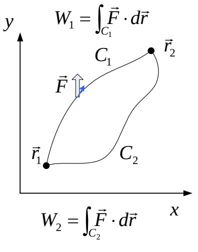
保存力の条件

任意のループする経路に沿って、元の点に戻ってきた場合の仕事（の総和）が0、と言っても良い。

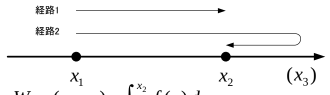
$$W_{\vec{r}_1\to\vec{r}_1} = W_{C_1(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)} + W_{C_2(\vec{r}_2\to\vec{r}_1)}$$
$$= W_{C_1(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)} - W_{C_2(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)} = 0$$

なら

$$W_{C_1(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)} = W_{C_2(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)}$$



保存力の例(1): 座標のみで決まる1次元の力



$$W_{直行}(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

$\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx = -\int_{x_3}^{x_2} f(x)\,dx$ なので、

$$W_{x_3経由}(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_3} f\,dx + \int_{x_3}^{x_2} f\,dx$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} f\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f\,dx + \int_{x_3}^{x_2} f\,dx = W_{直行}(x_1, x_2)$$

保存力の例(2): y座標だけで決まるy成分のみの力

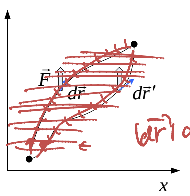
$\vec{F} = f_y(y)\vec{e}_y$ として.

$d\vec{r} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y$ ~~より~~

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$
$$= \int_{y_1}^{y_2} f_y(y)\,dy$$

（y_1、y_2は$\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$の y 成分）

なので、1次元の場合と同じ。



保存力の例(3): rのみの関数である中心力

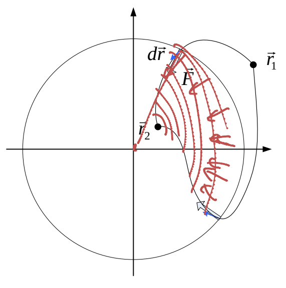
$\vec{F} = f_r(r)\vec{e}_r$

$d\vec{r} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta$ より

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$
$$= \int_{r_1}^{r_2} f_r(r)\,dr$$

（r_1、r_2は$\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$の r 成分）

で、1次元の場合と同じ。



位置エネルギー

位置エネルギーが 高い所から 低い所へ移動 すると仕事は正.

$U(\vec{r}_1) > U(\vec{r}_2)$ のとき $W_{\vec{r}_1\to\vec{r}_2} > 0$

$W_{\vec{r}_1\to\vec{r}_2}$
$= W_{\vec{r}_1\to O} + W_{O\to\vec{r}_2}$
$= U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)$

保存力：

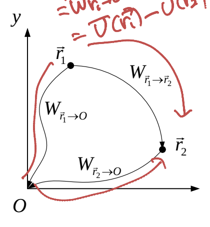
2つの位置の間を移動する質点になされる仕事が、2点の座標のみで決まる。

基準点 O を置けば：

$$W_{\vec{r}_1\to\vec{r}_2} = -W_{\vec{r}_2\to O} + W_{\vec{r}_1\to O}$$

位置エネルギー $\boxed{U(\vec{r}) \equiv W_{\vec{r}\to O}}$ $(= -W_{O\to\vec{r}})$

を定義 $\Rightarrow$ $W_{\vec{r}_1\to\vec{r}_2} = -U(\vec{r}_2) + U(\vec{r}_1)$



力学的エネルギーの保存則

- 保存力のみが作用している場合は、

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = W_{\vec{r}_1\to\vec{r}_2} = -U(\vec{r}_2) + U(\vec{r}_1)$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}m{v_2}^2 + U(\vec{r}_2) = \frac{1}{2}m{v_1}^2 + U(\vec{r}_1)$$

運動エネルギー+位置エネルギーが「保存」される

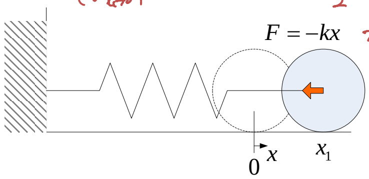
例(1):
ばねの位置エネルギー

- 基準の位置は通常釣り合いの位置にとる

$$U(x_1) = -W_{0\to x_1} = -\int_0^{x_1}(-kx)dx = \frac{1}{2}kx_1^{\ 2}$$

$(W_{x_1\to 0})$

$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$

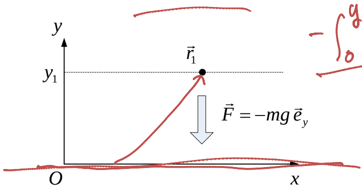


例(2):
重力の位置エネルギー

- 基準の位置は任意に設定した「基準の高さ」

$$U(\vec{r}_1) = -W_{0\to\vec{r}_1} = -\int_0^{y_1}(-mg)dy = mgy_1$$

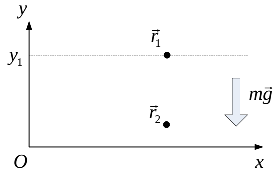
$-\int_0^{y} F_y\, dy$



余談:重力下のエネルギー保存

$v_2^2-v_1^2=2a(x_2-x_1)$

$$\frac{1}{2}mv_2^{\ 2}-\frac{1}{2}mv_1^{\ 2}=mgy_1-mgy_2$$
$$=m(-g)y_2-m(-g)y_1$$



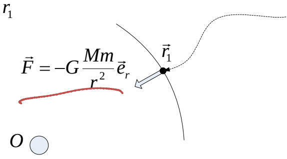
- 等加速度運動のところで出てきた式と比べてみてください。

例(3):
万有引力の位置エネルギー

- 基準の位置は「無限遠」に取る

$$U(\vec{r}_1)=-W_{\infty\to\vec{r}_1}=W_{\vec{r}_1\to\infty}=\int_{r_1}^{\infty}-G\frac{Mm}{r^2}dr$$
$$=\left[G\frac{Mm}{r}\right]_{r_1}^{\infty}=-G\frac{Mm}{r_1}$$

$-\frac{GMm}{r_E}$



参考:位置エネルギーから力

$$U(x,y)-U(x+\Delta x,y)=F_x\Delta x$$

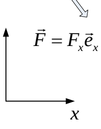
$$\Rightarrow \quad F_x=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{U(x+\Delta x,y)-U(x,y)}{\Delta x}\equiv-\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$F_y=-\frac{\partial U}{\partial y}$$

よって $\vec{F}=-\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x-\frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y\ (\equiv -\mathrm{grad}\ U)$

$\vec{r}=x\vec{e}_x+y\vec{e}_x$

(x,y) $(x+\Delta x,y)$



余談:ベクトル解析

- 力(ベクトル)や位置エネルギー(スカラー)が空間の位置の関数として定義されているとき:
  - ベクトル関数・スカラー関数の相互関係を微分・積分(偏微分・重積分)で示すもの
  - いま出てきた grad はその一例
  - ほかには例えば、力の場が保存力であるための必要条件は、rot $\vec{F}=0$ …とか。

束縛力の下での運動

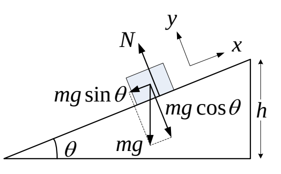
束縛された運動・束縛力

- ある軌道に沿って強制された運動
  - 斜面に沿って滑降
  - 紐に繋がって重力下で振子運動
  - （紐に繋がって円運動）
- その束縛条件を満たすような力が存在するものと考える→束縛力

「束縛力は仕事をしない」

- 運動経路が「滑らか」ということは、経路に平行な方向（接線方向）の束縛力の成分は 0 であるということ。
- よって束縛力は運動経路に垂直
  →内積は常に0なので、仕事をしない
- それ以外の外力（重力など）による仕事のみでエネルギー保存の議論ができる
- 経路に平行な方向の力は、いわゆる「摩擦力」

束縛力のある運動(1)
斜面の滑降



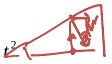
- 斜面に垂直な方向（y 方向）に束縛→加速度0
- y 方向の合力を0にするような抗力 N を仮定
- 滑り降りたときの速さはいくらか？

斜面の滑降：運動方程式版

$ma_x = -mg\sin\theta$、$ma_y = 0$

$t = 0$での物体の位置を原点、初速度0とすると、

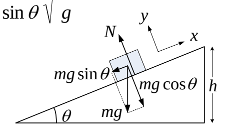
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\sin\theta \Rightarrow v = -g\sin\theta\, t \Rightarrow x = -\frac{1}{2}g\sin\theta\, t^2$$



yは時間によらず0で一定。

滑り降りた距離は$-\dfrac{h}{\sin\theta}$なので、$t = \dfrac{1}{\sin\theta}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

よって$v = -\sqrt{2gh}$



斜面の滑降：エネルギー保存版

初期位置における位置エネルギーはmgh。
垂直抗力は束縛力なので仕事をしない。
よって力学的エネルギーの保存則から、

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

$$\boxed{0 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 0}$$

よって$|v| = \sqrt{2gh}$

$|\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2$