物理学 I（力学）8 回目：仕事とエネルギー（2）

中野武雄

2012年5月29日

6回目課題の解答(1)

$ma' = F - mA$

$v(t) = At + v_0$

Q: F1マシンが、速度350 [km/h] から70 [km/h] までのブレーキングを2秒で行った。減速中の車の運動を等加速度直線運動と仮定し、ドライバーにかかる慣性力が重力の何倍か(何Gか)を求めよ。重力加速度は g=9.8 [m/s²] とせよ。

A: 慣性系から見た車系の加速度は、等加速度直線運動より

$$A = \frac{v(t) - v(0)}{t} = \frac{(70-350)[\mathrm{km/h}]}{2[\mathrm{s}]} \times \frac{1000[\mathrm{m}]}{1[\mathrm{km}]} \times \frac{1[\mathrm{h}]}{3600[\mathrm{s}]}$$

$$= -38.89[\mathrm{m/s^2}]$$

これによる慣性力 $-mA$ と重力 mg との比は

$$\frac{-A}{g} = \frac{38.89[\mathrm{m/s^2}]}{9.8[\mathrm{m/s^2}]} = 3.968 \sim 4 \text{ よって 4 倍}$$

6回目課題の解答(2)

Q: 地球の赤道を半径が 6.38×10³ [km] の円とみなし、自転の周期を 8.62×10⁴ [s] とする。地表の赤道上に静止している 1.0 [kg] の物体が受ける自転による遠心力を [N] 単位で求めよ。これは重力加速度 g による力 mg の何%か。

A:

$$\text{遠心力 } F_{CF} = mr\omega^2 = 1[\mathrm{kg}] \times 6.38\times10^6[\mathrm{m}] \times \left(\frac{2\pi}{8.62\times10^4[\mathrm{s}]}\right)^2$$

$$= 0.03389[\mathrm{kg\,m/s^2}] \sim 3.4\times10^{-2}[\mathrm{N}]。$$

これと重力 $mg = 1[\mathrm{kg}]\times 9.8[\mathrm{m/s^2}] = 9.8[\mathrm{kg\,m/s^2}]$ との比は

$$\frac{F_{CF}}{mg} = \frac{0.03389[\mathrm{N}]}{9.8[\mathrm{N}]} = 0.003458 \sim \text{よって}0.35\%。$$

$100[\mathrm{km/h}] \times \frac{1000[\mathrm{m}]}{1[\mathrm{km}]} \times \frac{1[\mathrm{h}]}{3600[\mathrm{s}]}$

6回目課題の解答(3)

Q: 2と同じ条件において、ある高さから地表に向けて物体を投げ降ろした。地表に衝突する直前の速度は、ちょうど地球の中心を向き、100 [km/h] であった。このときのコリオリの力の大きさを [N] 単位で求め、向きが地表での東西南北どちらか答えよ。

A: 回転系での（見かけの）運動方程式

$$ma'_x = F'_x + 2m\omega v'_y + m\omega^2 x'$$

$$ma'_y = F'_y - 2m\omega v'_x + m\omega^2 y'$$

$\vec{v}' = v'_x \vec{e}_x + v'_y \vec{e}_y$

$\vec{F}_{Cor} = 2m\omega v'_y \vec{e}_x - 2m\omega v'_x \vec{e}_y$

いま物体の落ちる方向と平行に x' 軸を取れば、

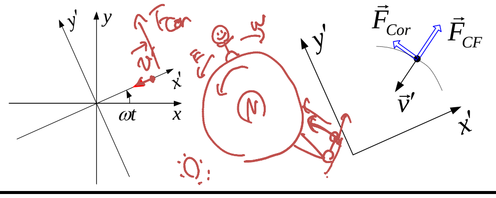
$v'_x = -100[\mathrm{km/h}]$、$v'_y = 0$ より、コリオリの力の大きさは

$$\left|\vec{F}_{Cor}\right| = \left|-2m\omega v'_x\right| = 2\times1.0[\mathrm{kg}]\times\frac{2\pi}{8.62\times10^4[\mathrm{s}]}\times(-27.778[\mathrm{m/s}])$$

$$= 4.0\dot{4}\dot{9}\times10^{-3}[\mathrm{kg\,m/s^2}] \sim 4.0[\mathrm{N}]$$

6回目課題の解答(3続)

地球の回転方向は、北極から見て時計と反対方向なので、6回目に考えた左図と同じ。このとき $\vec{F}_{Cor} = 2m\omega(v'_y\vec{e}_x - v'_x\vec{e}_y)$ で、$v'_x < 0$、$v'_y = 0$ よりコリオリの力は θ' の増える向き → 東向き。



今日の内容

- 前回のおさらい
  - 力学における保存量
  - ベクトルの内積と経路積分
  - 運動方程式の経路積分～運動エネルギーと仕事
- 保存力と位置エネルギー
  - 保存力の定義
  - 位置エネルギー
  - 力学的エネルギーの保存則
  - 位置エネルギーの具体例
  - 束縛された運動：束縛力と位置エネルギー

3つの保存量

- エネルギー
  - 質点系が受ける「仕事」が 0 なら変化しない
  - 保存力による仕事→全エネルギーの保存
  - ベクトルの「内積」と深く関わる
- 運動量
  - 質点系が受ける外力が 0 なら変化しない
  - 多体系で便利に使える
- 角運動量
  - 質点系が受ける「力のモーメント」が0なら変化しない
  - ベクトルの「外積」と深く関わる

ベクトルの内積

自分との内積：

$\vec{A}\cdot\vec{A}=|\vec{A}|^2\left(=A^2\right)$

交換法則：

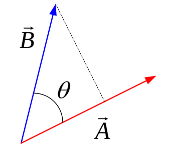
$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$

結合法則（スカラー倍）：

$\left(k\vec{A}\right)\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot\left(k\vec{B}\right)=k\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$

分配法則：

$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$



$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$

ベクトルの内積の成分表現

基準ベクトル $\vec{e}_1$、$\vec{e}_2$ を用いると：

$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1=0$

$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1=\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2=1$

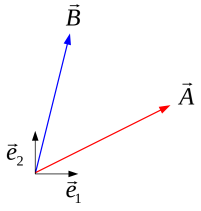
成分表現

$\vec{A}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2$

$\vec{B}=b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2$

に対して分配則を使えば、

$\vec{A}\cdot\vec{B}=a_1b_1+a_2b_2$



復習：経路積分（線積分）

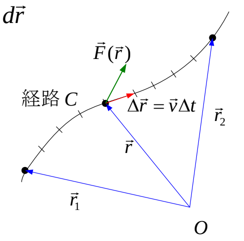
$$\sum\vec{F}(\vec{r})\cdot\Delta\vec{r}\ \underset{刻み目\to極小}{\longrightarrow}\ \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

通常は経路に依存するので、

経路Cを意識する場合には

$$\int_{C(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

のようにも書く。



復習：運動方程式の経路積分

運動方程式

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}$$

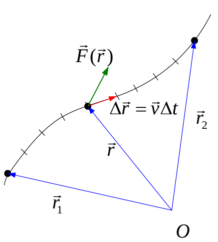
の両辺を線積分する

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

左辺は置換積分する

$d\vec{r}=\vec{v}\,dt$

$\vec{r}$	$\vec{r}_1\to\vec{r}_2$
t	$t_1\to t_2$



復習：エネルギー方程式

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$\vec{r}_1=\vec{r}(t_1)$、$\vec{r}_2=\vec{r}(t_2)$となるようt_1、t_2を定め、

$d\vec{r}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}dt=\vec{v}dt$を用いると、

$$左辺=\int_{t_1}^{t_2}m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}dt$$

いま$\dfrac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right)=\dfrac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\dfrac{d\vec{v}}{dt}=2\dfrac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}$より、

$$左辺=\int_{t_1}^{t_2}\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(|\vec{v}|^2\right)dt=\frac{1}{2}m{v_2}^2-\frac{1}{2}m{v_1}^2$$

復習:「仕事」の定義・「運動エネルギー」の定義

右辺$=\int_{\vec r_1}^{\vec r_2}\vec F\cdot d\vec r\equiv W(\vec r_1,\vec r_2)$と定義。

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m{v_2}^2-\frac{1}{2}m{v_1}^2=W(\vec r_1,\vec r_2)$$

$\frac{1}{2}mv^2$　：運動エネルギー

$W(\vec r_1,\vec r_2)$　：経路$\vec r_1\to\vec r_2$における仕事

- 「運動エネルギーの増加は、その間に質点に働いた力のなす仕事に等しい」

運動方程式の積分(1次元)

$$\int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv}{dt}dx=\int_{x_1}^{x_2}F\,dx$$

左辺で$dx=vdt$と置換する。$\begin{array}{c|c} x & x_1\to x_2 \\ \hline t & t_1\to t_2\end{array}$

$$左辺=\int_{t_1}^{t_2}m\frac{dv}{dt}vdt=\int_{t_1}^{t_2}\frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(v^2\right)dt=\frac{1}{2}m\{v(t_2)\}^2-\frac{1}{2}m\{v(t_1)\}^2$$

右辺$=\int_{x_1}^{x_2}F\,dx$ は $W(x_1\to x_2)$と定義。

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m\{v(t_2)\}^2-\frac{1}{2}m\{v(t_1)\}^2=W(x_1\to x_2)$$

余談:再び置換？

$(\vec v_1)^2+(d\vec v)^2+2\vec v_1\cdot d\vec v=(\vec v_2)^2$

$$\int_{x_1}^{x_2} m\frac{dv}{dt}dx=\int_{x_1}^{x_2}F\,dx$$

$$左辺=\int_{t_1}^{t_2}m\frac{dv}{dt}vdt$$

再び$dv=\frac{dv}{dt}dt$と置換する。$\begin{array}{c|c} t & t_1\to t_2 \\ \hline v & v_1\to v_2\end{array}$

すると左辺$=\int_{v_1}^{v_2}mvdv=\left[m\frac{1}{2}v^2\right]_{v_1}^{v_2}$

2次元以上では$\int_{\vec v_1}^{\vec v_2}m\vec v\cdot d\vec v$ ？（多分正しい）$\left[\frac{m}{2}(\vec v)^2\right]_{\vec v_1}^{\vec v_2}$

参考:関数の積の微分

$$\frac{d}{dt}\left(f(t)g(t)\right)$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{f(t+\Delta t)g(t+\Delta t)-f(t)g(t)}{\Delta t}\right\}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{f(t+\Delta t)\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}+\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}g(t)\right\}$$

$$=f(t)\frac{dg(t)}{dt}+\frac{df(t)}{dt}g(t)$$

参考:ベクトルの内積の微分

$$\frac{d}{dt}\left(\vec a(t)\cdot\vec b(t)\right)$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\frac{\vec a(t+\Delta t)\cdot\vec b(t+\Delta t)-\vec a(t)\cdot\vec b(t)}{\Delta t}\right\}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left\{\vec a(t+\Delta t)\cdot\left(\frac{\vec b(t+\Delta t)-\vec b(t)}{\Delta t}\right)+\left(\frac{\vec a(t+\Delta t)-\vec a(t)}{\Delta t}\right)\cdot\vec b(t)\right\}$$

$$=\vec a(t)\cdot\frac{d\vec b(t)}{dt}+\frac{d\vec a(t)}{dt}\cdot\vec b(t)$$

「仕事」の計算

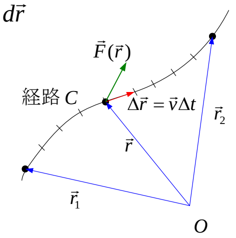
復習：経路積分（線積分）

$$\sum \vec{F}(\vec{r})\cdot\Delta\vec{r} \underset{\text{刻み目}\to\text{極小}}{\longrightarrow} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

通常は経路に依存するので、
経路Cを意識する場合には

$$\int_{C(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

のようにも書く。



逆向きの経路積分は符号が反転

経路を逆向きに辿るとき、

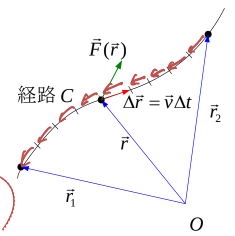
$$W_{C(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)}=\int_{C(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$=-\int_{C(\vec{r}_2\to\vec{r}_1)}\vec{F}\cdot d\vec{r}=-W_{C(\vec{r}_2\to\vec{r}_1)}$$

なぜなら

$$\int_{C(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\lim_{\text{刻み目}\to 0}\sum\vec{F}(\vec{r})\cdot\Delta\vec{r}_i$$

$$\int_{C(\vec{r}_2\to\vec{r}_1)}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\lim_{\text{刻み目}\to 0}\sum\vec{F}(\vec{r})\cdot(-\Delta\vec{r}_i)$$



成分を用いた線積分の計算

$\vec{v}=\frac{dx}{dt}\vec{e}_x+\frac{dy}{dt}\vec{e}_y$

$\vec{F}=F_x\vec{e}_x+F_y\vec{e}_y$

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\vec{v}dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(F_x\frac{dx}{dt}+F_y\frac{dy}{dt}\right)dt$$

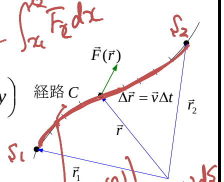
$$=\int_{t_1}^{t_2}F_x\frac{dx}{dt}dt+\int_{t_1}^{t_2}F_y\frac{dy}{dt}dt$$

$\int_{x_1}^{x_2}F_x dx$

$$\left(=\int_{x_1}^{x_2}F_x(x,y(x))dx+\int_{y_1}^{y_2}F_y(x(y),y)dy\right)$$

なおt は $\vec{r}=x(t)\vec{e}_x+y(t)\vec{e}_y$ を定めれば良い
のであって、必ずしも実際の時間そのもの
でなくても良い。同様に二次元極座標なら

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{t_1}^{t_2}F_r\frac{dr}{dt}dt+\int_{t_1}^{t_2}F_\theta r\frac{d\theta}{dt}dt$$



$(x(s),y(s))$

$\int_{s_1}^{s_2} F_x(s)\frac{dx}{ds}+F_y(s)\frac{dy}{ds}ds$

課題4のヒント

経路2はθを用いて

$x(\theta)=r\cos\theta,\ y(\theta)=r\sin\theta+r$

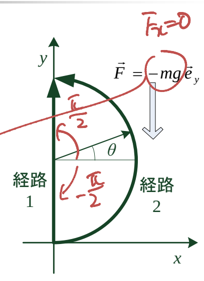
と表せる。よって

$\frac{dx}{d\theta}=-r\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta}=r\cos\theta$

これを用いて

$$W_2=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(F_x\frac{dx}{d\theta}+F_y\frac{dy}{d\theta}\right)d\theta$$

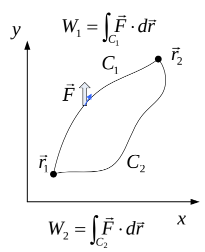
の積分を実行すれば良い。



保存力と位置エネルギー

保存力

- 一般には2点間を質点が移動するとき、その仕事は経路に依存する
- 特定の条件を満たす場合、経路に依存せずに2点の位置だけで仕事が決まる →保存力



保存力の条件

任意のループする経路に沿って、元の点に戻ってきた場合の仕事（の総和）が0、と言っても良い。

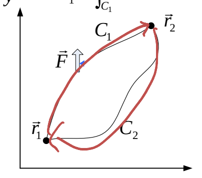
$$W_{\vec{r}_1\to\vec{r}_1} = W_{C_1(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)} + W_{C_2(\vec{r}_2\to\vec{r}_1)} = 0$$

$$= W_{C_1(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)} - W_{C_2(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)} = 0$$

なら

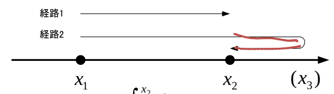
$$W_{C_1(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)} = W_{C_2(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)}$$

$$W_1 = \int_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$



$$W_2 = \int_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

保存力の例(1):座標のみで決まる1次元の力



$$W_{直行}(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

$\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx = -\int_{x_3}^{x_2} f(x)\,dx$ なので、

$$W_{x_3経由}(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_3} f\,dx + \int_{x_3}^{x_2} f\,dx$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f\,dx + \int_{x_3}^{x_2} f\,dx = W_{直行}(x_1, x_2)$$

保存力の例(2):y座標だけで決まるy成分のみの力

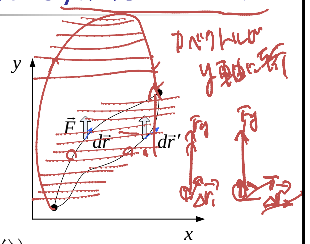
$\vec{F} = f_y(y)\vec{e}_y$

$d\vec{r} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y$ より

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} f_y(y)\,dy$$

（y_1、y_2 は $\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$ の y 成分）なので、1次元の場合と同じ。



保存力の例(3):rのみの関数である中心力

向きが原点方向

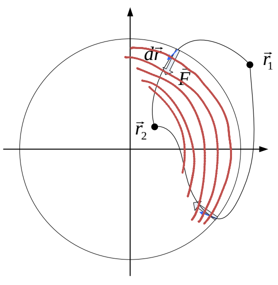
$\vec{F} = f_r(r)\vec{e}_r$

$d\vec{r} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta$ より

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} f_r(r)\,dr$$

（r_1、r_2 は $\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$ の r 成分）で、1次元の場合と同じ。



位置エネルギー

$W_{\vec{r}_1\to\vec{r}_2} = W_{\vec{r}_1\to O} + W_{O\to\vec{r}_2}$

$W_{\vec{r}_1\to O} - W_{\vec{r}_2\to O}$

保存力：

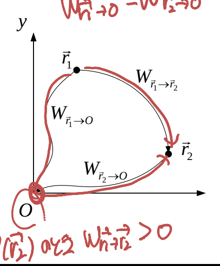
2つの位置の間を移動する質点になされる仕事が、2点の座標のみで決まる。

基準点 O を置けば：

$$W_{\vec{r}_1\to\vec{r}_2} = -W_{\vec{r}_2\to O} + W_{\vec{r}_1\to O}$$

位置エネルギー $\boxed{U(\vec{r}) \equiv W_{\vec{r}\to O}}$ $(= -W_{O\to\vec{r}})$

を定義 ⇒ $W_{\vec{r}_1\to\vec{r}_2} = -U(\vec{r}_2) + U(\vec{r}_1)$



$U(\vec{r}_1) > U(\vec{r}_2)$ のとき $W_{\vec{r}_1\to\vec{r}_2} > 0$

力学的エネルギーの保存則

- 保存力のみが作用している場合は、

$$\frac{1}{2}mv_2^{\,2} - \frac{1}{2}mv_1^{\,2} = W_{\vec{r}_1\to\vec{r}_2} = -U(\vec{r}_2) + U(\vec{r}_1)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^{\,2} + U(\vec{r}_2) = \frac{1}{2}mv_1^{\,2} + U(\vec{r}_1)$$

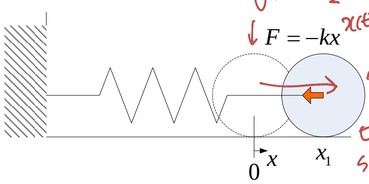
運動エネルギー+位置エネルギーが「保存」される

例(1):
ばねの位置エネルギー

- 基準の位置は通常釣り合いの位置にとる

$$U(x_1) = -W_{0\to x_1} = -\int_0^{x_1}(-kx)dx = \frac{1}{2}kx_1{}^2$$

$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = $ 一定



$x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$

$v(t) = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t$

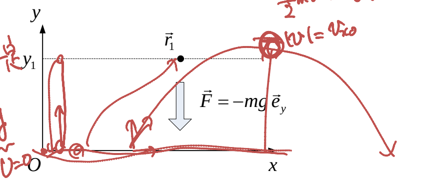
ヒント: $\sin^2\omega t + \cos^2\omega t = 1$ (tによらない)

例(2):
重力の位置エネルギー

- 基準の位置は任意に設定した「基準の高さ」

$$U(\vec{r}_1) = -W_{0\to \vec{r}_1} = -\int_0^{y_1}(-mg)dy = mgy_1$$

$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = $ 一定



$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = $ 一定

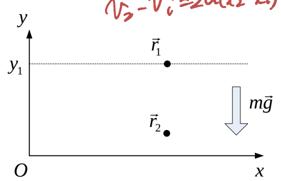
$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgy$

$v = 0$

余談:重力下のエネルギー保存

$v_2^2 - v_1^2 = 2a(x_2 - x_1)$

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2 - \frac{1}{2}mv_1{}^2 = mgy_1 - mgy_2$$
$$= m(-g)y_2 - m(-g)y_1$$

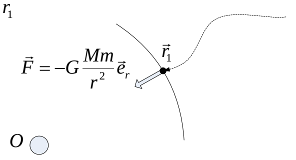


- 等加速度運動のところで出てきた式と比べてみてください。

例(3):
万有引力の位置エネルギー

- 基準の位置は「無限遠」に取る

$$U(\vec{r}_1) = -W_{\infty\to \vec{r}_1} = W_{\vec{r}_1\to\infty} = \int_{r_1}^{\infty} -G\frac{Mm}{r^2}dr$$
$$= \left[G\frac{Mm}{r}\right]_{r_1}^{\infty} = -G\frac{Mm}{r_1}$$



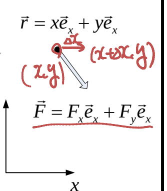
参考:位置エネルギーから力

$U(x,y)$

$$U(x,y) - U(x+\Delta x, y) = F_x \Delta x$$
$$\Rightarrow \quad F_x = -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{U(x+\Delta x, y) - U(x,y)}{\Delta x} \equiv -\frac{\partial U}{\partial x}$$
$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

偏微分

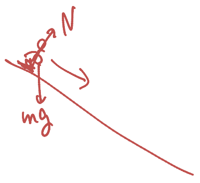
よって $\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y \quad (\equiv -\mathrm{grad}\, U)$



余談:ベクトル解析

- 力(ベクトル)や位置エネルギー(スカラー)が空間の位置の関数として定義されているとき:
  - ベクトル関数・スカラー関数の相互関係を微分・積分(偏微分・重積分)で示すもの
  - いま出てきた grad はその一例
  - ほかには例えば、力の場が保存力であるための必要条件は、$\mathrm{rot}\,\vec{F} = 0$ …とか。

束縛力の下での運動



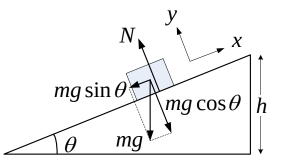
束縛された運動・束縛力

- ある軌道に沿って強制された運動
  - 斜面に沿って滑降
  - 紐に繋がって重力下で振子運動
  - （紐に繋がって円運動）
- その束縛条件を満たすような力が存在するものと考える→束縛力

「束縛力は仕事をしない」

- 運動経路が「滑らか」ということは、経路に平行な方向（接線方向）の束縛力の成分は 0 であるということ。
- よって束縛力は運動経路に垂直
  →内積は常に0なので、仕事をしない
- それ以外の外力（重力など）による仕事のみでエネルギー保存の議論ができる
- 経路に平行な方向の力は、いわゆる「摩擦力」

束縛力のある運動(1) 斜面の滑降



- 斜面に垂直な方向（y 方向）に束縛→加速度0
- y 方向の合力を0にするような抗力Nを仮定
- 滑り降りたときの速さはいくらか？

斜面の滑降：運動方程式版

$ma_x = -mg\sin\theta$、$ma_y = 0$

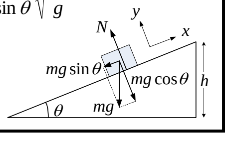
$t=0$での物体の位置を原点、初速度0とすると、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\sin\theta \Rightarrow v = -g\sin\theta\, t \Rightarrow x = -\frac{1}{2}g\sin\theta\, t^2$$

yは時間によらず0で一定。

滑り降りた距離は$-\frac{h}{\sin\theta}$なので、$t = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

よって$v = -\sqrt{2gh}$



斜面の滑降：エネルギー保存版

初期位置における位置エネルギーはmgh。
垂直抗力は束縛力なので仕事をしない。
よって力学的エネルギーの保存則から、

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

よって$v = \sqrt{2gh}$