物理学 I（力学）8 回目：仕事とエネルギー（2）

中野武雄
2012年5月29日

今日の内容

- 前回のおさらい
  - 力学における保存量
  - ベクトルの内積と経路積分
  - 運動方程式の経路積分～運動エネルギーと仕事
- 保存力と位置エネルギー
  - 保存力の定義
  - 位置エネルギー
  - 力学的エネルギーの保存則
  - 位置エネルギーの具体例
  - 束縛された運動：束縛力と位置エネルギー

復習：運動方程式の経路積分

運動方程式

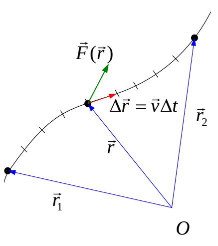
$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

の両辺を線積分する

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

左辺は置換積分する

$$d\vec{r} = \vec{v}\,dt \qquad \begin{array}{c|c} \vec{r} & \vec{r}_1 \to \vec{r}_2 \\ \hline t & t_1 \to t_2 \end{array}$$



復習：エネルギー方程式

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$、$\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$となるようt_1、t_2を定め、

$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt}dt = \vec{v}dt$を用いると、

$$左辺 = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}dt$$

いま$\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = 2\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}$より、

$$左辺 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m}{2}\frac{d}{dt}\left(|\vec{v}|^2\right)dt = \frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2$$

復習：「仕事」の定義・「運動エネルギー」の定義

右辺$= \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} \equiv W(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$と定義。

$$\Rightarrow \frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = W(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$

$\frac{1}{2}mv^2$　：運動エネルギー

$W(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$　：経路$\vec{r}_1 \to \vec{r}_2$における仕事

- 「運動エネルギーの増加は、その間に質点に働いたカのなす仕事に等しい」

「仕事」の計算

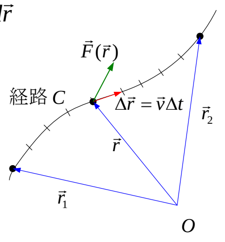
復習：経路積分（線積分）

$$\sum \vec{F}(\vec{r})\cdot\Delta\vec{r} \underset{刻み目\to極小}{\longrightarrow} \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

通常は経路に依存するので、
経路Cを意識する場合には

$$\int_{C(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

のようにも書く。



逆向きの経路積分は符号が反転

経路を逆向きに辿るとき、

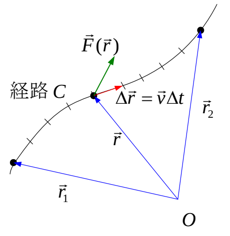
$$W_{C(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)} = \int_{C(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= -\int_{C(\vec{r}_2\to\vec{r}_1)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -W_{C(\vec{r}_2\to\vec{r}_1)}$$

なぜなら

$$\int_{C(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \lim_{刻み目\to 0}\sum \vec{F}(\vec{r})\cdot\Delta\vec{r}_i$$

$$\int_{C(\vec{r}_2\to\vec{r}_1)} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \lim_{刻み目\to 0}\sum \vec{F}(\vec{r})\cdot(-\Delta\vec{r}_i)$$



成分を用いた線積分の計算

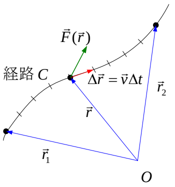
$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\cdot\vec{v}dt = \int_{t_1}^{t_2}\left(F_x\frac{dx}{dt}+F_y\frac{dy}{dt}\right)dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} F_x\frac{dx}{dt}dt + \int_{t_1}^{t_2} F_y\frac{dy}{dt}dt$$

$$\left(= \int_{x_1}^{x_2} F_x(x, y(x))dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y(x(y), y)dy\right)$$

なおt は $\vec{r} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y$ を定めれば良いのであって、必ずしも実際の時間そのものでなくても良い。同様に二次元極座標なら

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} F_r\frac{dr}{dt}dt + \int_{t_1}^{t_2} F_\theta r\frac{d\theta}{dt}dt$$



課題4のヒント

経路2はθを用いて

$$x(\theta) = r\cos\theta,\ y(\theta) = r\sin\theta + r$$

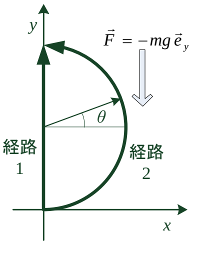
と表せる。よって

$$\frac{dx}{d\theta} = -r\sin\theta,\ \frac{dy}{d\theta} = r\cos\theta$$

これを用いて

$$W_2 = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(F_x\frac{dx}{d\theta}+F_y\frac{dy}{d\theta}\right)d\theta$$

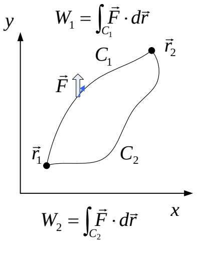
の積分を実行すれば良い。



保存力と位置エネルギー

保存力

- 一般には2点間を質点が移動するとき、その仕事は経路に依存する
- 特定の条件を満たす場合、経路に依存せずに2点の位置だけで仕事が決まる →保存力



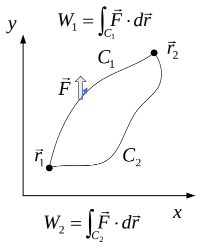
保存力の条件

任意のループする経路に沿って、元の点に戻ってきた場合の仕事（の総和）が0、と言っても良い。

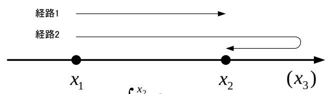
$$W_{\vec{r}_1\to\vec{r}_1} = W_{C_1(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)} + W_{C_2(\vec{r}_2\to\vec{r}_1)}$$
$$= W_{C_1(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)} - W_{C_2(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)} = 0$$

なら

$$W_{C_1(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)} = W_{C_2(\vec{r}_1\to\vec{r}_2)}$$



保存力の例(1):
座標のみで決まる1次元の力



$$W_{直行}(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$$

$\int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx = -\int_{x_3}^{x_2} f(x)\,dx$ なので、

$$W_{x_3経由}(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_3} f\,dx + \int_{x_3}^{x_2} f\,dx$$
$$= \int_{x_1}^{x_2} f\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f\,dx + \int_{x_3}^{x_2} f\,dx = W_{直行}(x_1, x_2)$$

保存力の例(2):
y座標だけで決まるy成分のみの力

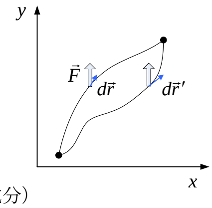
$\vec{F} = f_y(y)\vec{e}_y$

$d\vec{r} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y$ より

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$
$$= \int_{y_1}^{y_2} f_y(y)\,dy$$

（y_1、y_2 は $\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$ の y 成分）

なので、1次元の場合と同じ。



保存力の例(3):
r のみの関数である中心力

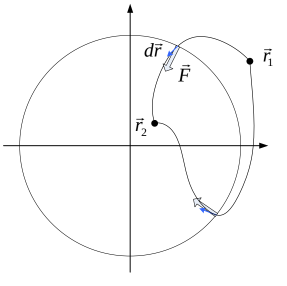
$\vec{F} = f_r(r)\vec{e}_r$

$d\vec{r} = dr\,\vec{e}_r + r\,d\theta\,\vec{e}_\theta$ より

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$
$$= \int_{r_1}^{r_2} f_r(r)\,dr$$

（r_1、r_2 は $\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$ の r 成分）

で、1次元の場合と同じ。



位置エネルギー

保存力：

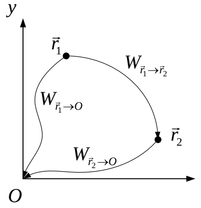
2つの位置の間を移動する質点になされる仕事が、2点の座標のみで決まる。

基準点 O を置けば：

$$W_{\vec{r}_1\to\vec{r}_2} = -W_{\vec{r}_2\to O} + W_{\vec{r}_1\to O}$$

位置エネルギー $U(\vec{r}) \equiv W_{\vec{r}\to O}\ (= -W_{O\to\vec{r}})$

を定義 $\Rightarrow$ $W_{\vec{r}_1\to\vec{r}_2} = -U(\vec{r}_2) + U(\vec{r}_1)$



力学的エネルギーの保存則

- 保存力のみが作用している場合は、

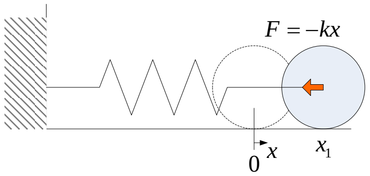
$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = W_{\vec{r}_1\to\vec{r}_2} = -U(\vec{r}_2) + U(\vec{r}_1)$$
$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}m{v_2}^2 + U(\vec{r}_2) = \frac{1}{2}m{v_1}^2 + U(\vec{r}_1)$$

運動エネルギー+位置エネルギーが「保存」される

例(1): ばねの位置エネルギー

- 基準の位置は通常釣り合いの位置にとる

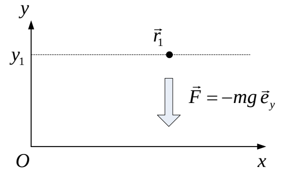
$$U(x_1) = -W_{0\to x_1} = -\int_0^{x_1}(-kx)dx = \frac{1}{2}kx_1^2$$



例(2): 重力の位置エネルギー

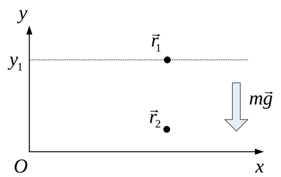
- 基準の位置は任意に設定した「基準の高さ」

$$U(\vec{r}_1) = -W_{0\to \vec{r}_1} = -\int_0^{y_1}(-mg)dy = mgy_1$$



余談：重力下のエネルギー保存

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = mgy_1 - mgy_2$$
$$= m(-g)y_2 - m(-g)y_1$$

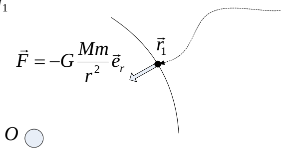


- 等加速度運動のところで出てきた式と比べてみてください。

例(3): 万有引力の位置エネルギー

- 基準の位置は「無限遠」に取る

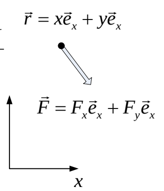
$$U(\vec{r}_1) = -W_{\infty\to \vec{r}_1} = W_{\vec{r}_1\to\infty} = \int_{r_1}^{\infty} -G\frac{Mm}{r^2}dr$$
$$= \left[G\frac{Mm}{r}\right]_{r_1}^{\infty} = -G\frac{Mm}{r_1}$$



参考：位置エネルギーから力

$$U(x,y) - U(x+\Delta x, y) = F_x \Delta x$$
$$\Rightarrow \quad F_x = -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{U(x+\Delta x,y) - U(x,y)}{\Delta x} \equiv -\frac{\partial U}{\partial x}$$
$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}$$

よって $\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{e}_x - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{e}_y \ (\equiv -\mathrm{grad}\ U)$



余談：ベクトル解析

- 力（ベクトル）や位置エネルギー（スカラー）が空間の位置の関数として定義されているとき：
  - ベクトル関数・スカラー関数の相互関係を微分・積分（偏微分・重積分）で示すもの
  - いま出てきた grad はその一例
  - ほかには例えば、力の場が保存力であるための必要条件は、$\mathrm{rot}\ \vec{F} = 0$ …とか。

束縛力の下での運動

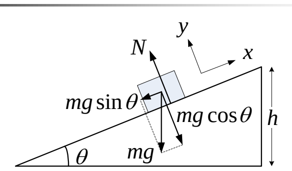
束縛された運動・束縛力

- ある軌道に沿って強制された運動
  - 斜面に沿って滑降
  - 紐に繋がって重力下で振子運動
  - （紐に繋がって円運動）
- その束縛条件を満たすような力が存在するものと考える→束縛力

「束縛力は仕事をしない」

- 運動経路が「滑らか」ということは、経路に平行な方向（接線方向）の束縛力の成分は 0 であるということ。
- よって束縛力は運動経路に垂直
  →内積は常に0なので、仕事をしない
- それ以外の外力（重力など）による仕事のみでエネルギー保存の議論ができる
- 経路に平行な方向の力は、いわゆる「摩擦力」

束縛力のある運動(1) 斜面の滑降



- 斜面に垂直な方向（y 方向）に束縛→加速度0
- y 方向の合力を0にするような抗力Nを仮定
- 滑り降りたときの速さはいくらか？

斜面の滑降：運動方程式版

$ma_x = -mg\sin\theta$、$ma_y = 0$

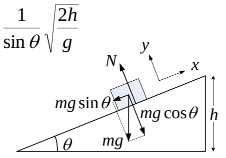
$t=0$での物体の位置を原点、初速度0とすると、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g\sin\theta \Rightarrow v = -g\sin\theta\, t \Rightarrow x = -\frac{1}{2}g\sin\theta\, t^2$$

yは時間によらず0で一定。

滑り降りた距離は$-\dfrac{h}{\sin\theta}$なので、$t = \dfrac{1}{\sin\theta}\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

よって$v = -\sqrt{2gh}$



斜面の滑降：エネルギー保存版

初期位置における位置エネルギーはmgh。
垂直抗力は束縛力なので仕事をしない。
よって力学的エネルギーの保存則から、

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

よって$v = \sqrt{2gh}$