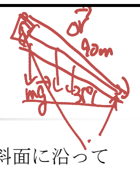
物理学 I（力学）９回目：力積と運動量・物体の衝突

中野武雄
2011年6月5日

7回目課題の解答(1)

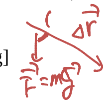


Q.質量 $m=60$[kg]の質点が、傾斜35度の斜面に沿って90[m]滑り降りた。質点は鉛直下向きに一定の重力 $m\vec{g}$ を受け続けるとして、内積 $\Delta\vec{r}\cdot(m\vec{g})$ の大きさを計算せよ。ただし重力加速度の大きさ $|\vec{g}|=9.8[\mathrm{m/s^2}]$。

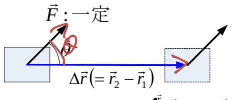
A. 質点の移動方向と重力の成す角は55度となるから、

$$\Delta\vec{r}\cdot(m\vec{g})=|\Delta\vec{r}||m\vec{g}|\cos\theta$$
$$=90[\mathrm{m}]\times 60[\mathrm{kg}]\times 9.8[\mathrm{m/s^2}]\times\cos 55[\mathrm{deg}]$$
$$=3.035\times10^4[\mathrm{kg\,m^2/s^2}]=3.0\times10^4[\mathrm{J}]$$

[N.m]



参考：一定の力で直線移動させるときの「仕事」



$$W=\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\vec{F}\cdot\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}d\vec{r}$$
$$=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=|\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos\theta$$

この値が $\vec{r}_2$ と $\vec{r}_1$ での運動エネルギーの差に等しい

7回目課題の解答(1)

Q.このとき、斜面下端での速度は何[m/s]となるか。

A. 斜面の垂直抗力は仕事をしないので、上端での速度を0とすると、エネルギー保存の関係は

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_{\text{下端}}^{\ 2}=W}=\Delta\vec{r}\cdot(m\vec{g})$$

$-\frac{1}{2}mv_{\text{上端}}^2=0$

よって

$$v_{\text{下端}}=\sqrt{\frac{2W}{m}}=\sqrt{\frac{2\times3.035\times10^4[\mathrm{kg\,m^2/s^2}]}{60[\mathrm{kg}]}}=31.8[\mathrm{m/s}]$$

7回目課題の解答(1)

(1) $\frac{1}{2}mv_{\text{下端}}^{\ 2}=mgh=m|\vec{g}||\Delta\vec{r}|\sin 35[\mathrm{deg}]$

(2) $\frac{1}{2}mv_{\text{下端}}^{\ 2}=W$

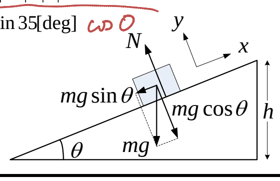
$\stackrel{0}{=}$

(2a) $W=\Delta\vec{r}\cdot(m\vec{g})+\Delta\vec{r}\cdot\vec{N}=|\Delta\vec{r}|m|\vec{g}|\cos 55[\mathrm{deg}]$

(2b) $W=\Delta\vec{r}\cdot F_{\text{合力}}=|\Delta\vec{r}|m|\vec{g}|\sin 35[\mathrm{deg}]$ cos θ

(3) $m\frac{d^2x}{dt^2}=-mg\sin 35[\mathrm{deg}]$

…



7回目課題の解答(2)

等速円運動では、質点には常に回転中心に向いた力が作用しているが、物体の速さ（速度の絶対値）は変化しない（すなわち運動エネルギーも変化しない）。なぜか説明せよ。

（解答例）

等速円運動では、速度ベクトルと力ベクトルが常に直交している。よって両者の内積が 0 であるため、質点になされる仕事は常に 0。従って運動エネルギーは変化しない。

「向心力＝遠心力」

- 「なので物体にかかる力は0、よって仕事は0でエネルギーは不変」という解答多数。
- 実は言明としては正しい。
- が、色々な追加議論が必要。
  - 非慣性系でのエネルギー保存則は成立するか？
  - 座標系が異なるとき、エネルギー保存則はどのようにうつされるか？（今日の最後にちょっと議論アリ）
  - 特に非慣性系ではどうか？

  …など、いろいろ難しい。

今日の内容

- 「仕事とエネルギー」の復習
- 力積と運動量
  - 運動方程式の時間積分→運動量の変化＝力積
  - 作用反作用の法則と内力・外力
  - 質点系の重心と全運動量
- 2物体の衝突問題
  - 1次元の衝突と反発係数
  - 反発係数と運動エネルギーの保存
  - 重心を用いた衝突問題の解析

仕事・エネルギー ← 移動分（内積）
スカラー量
力積・運動量 ← 時間積分
ベクトル量

力積と運動量

運動量と運動方程式

定義： $\vec{p} \equiv m\vec{v}$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

より、運動方程式は

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)$

この両辺を時間で積分すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$$

ベクトルの時間積分？

$\vec{F}(t_1+\Delta t)$ $\vec{F}(t_1)$ $\vec{F}(t_2)$

$\Delta t = \frac{t_2 - t_1}{n}$ と置くと：

t_1 t_2

$$\vec{F}(t_1)\Delta t + \vec{F}(t_1+\Delta t)\Delta t + \cdots + \vec{F}(t_1+(n-1))\Delta t$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}(t_1 + i\Delta t)\Delta t \underset{\substack{n\to\infty \\ \Delta t \to 0}}{\longrightarrow} \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\, dt$$

デカルト座標系で

$\vec{F}(t) = F_x(t)\vec{e}_x + F_y(t)\vec{e}_y$ と成分表示できるなら

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\, dt = \left\{ \int_{t_1}^{t_2} F_x(t)\, dt \right\}\vec{e}_x + \left\{ \int_{t_1}^{t_2} F_y(t)\, dt \right\}\vec{e}_y$$

運動量の変化＝力積

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \frac{dp_x}{dt} dt \right\}\vec{e}_x + \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \frac{dp_y}{dt} dt \right\}\vec{e}_y$$

$$= \{p_x(t_2) - p_x(t_1)\}\vec{e}_x + \{p_y(t_2) - p_y(t_1)\}\vec{e}_y$$

$$= \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)$$

力積（ベクトル）

$\vec{I} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$ と定義すれば、

単位
例えば：
$(|\vec{F}| = ○○[N] \to |\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt| = △△[N\cdot s]$

$\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \vec{I}$

- 運動量の変化は、与えられた力積に等しい

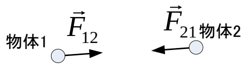
運動量保存則

- 力の働いていない物体

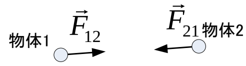
$\frac{d\vec{p}}{dt}=0$ より、$\vec{p}$は時間によらず一定。

- 力を及ぼしあう2物体

作用反作用の法則より、運動量の和は不変。



全運動量の保存



第三法則より $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$、よって

$$\vec{p}_1(t_2)-\vec{p}_1(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{12}dt$$

$$\vec{p}_2(t_2)-\vec{p}_2(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{21}dt = \int_{t_1}^{t_2}(-\vec{F}_{12})dt = -\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{12}dt$$

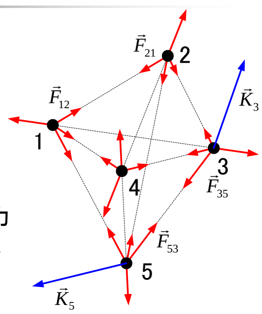
より、 $\vec{p}_1(t_2)-\vec{p}_1(t_1)=-\{\vec{p}_2(t_2)-\vec{p}_2(t_1)\}$

$\Rightarrow \quad \vec{p}_1(t_2)+\vec{p}_2(t_2)=\vec{p}_1(t_1)+\vec{p}_2(t_1)$

質点系の全運動量保存

全運動量 $\vec{P}=\sum_i \vec{p}_i$

- 内力：質点間に働く力
  →作用反作用の法則より
  2質点で運動量変化は
  キャンセル
- 外力：外部から質点に働く力
  →キャンセルできないので、
  力積ぶん運動量が変化



重心と全運動量

$$\frac{d\vec{R}_G}{dt}=\sum_i \frac{m_i}{M}\frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$m_1+m_2+\cdots+m_5=\sum_i m_i = M$

重心ベクトル $\vec{R}_G \equiv \sum_i \frac{m_i}{M}\vec{r}_i$

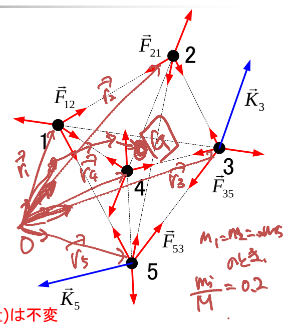
これを用いると全運動量は

$$\vec{P}=\sum_i m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}=M\frac{d\vec{R}_G}{dt}$$

また

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\sum_i m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}=\sum_i \vec{K}_i$$

外力が0なら全運動量(=重心の運動量)は不変

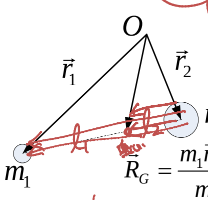


$m_1=m_2=\cdots=m_5$ のとき、 $\frac{m_i}{M}=0.2$

2物体の場合の重心

重心: $(\vec{r}_1-\vec{r}_2):(\vec{R}_G-\vec{r}_2)$

- 重心は2物体を結ぶ線上にあり、それぞれの質量に反比例して内分した点となる。



$$\vec{R}_G=\frac{m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$$

$l_1 : l_2 = \frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2}$

2物体の衝突

衝突における運動量保存

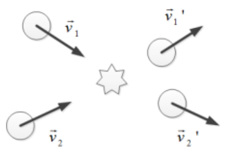
衝突の際の相互作用が、2物体の相互作用力のみであるとすれば、全運動量保存より

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

なので、

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}'_1 + m_2\vec{v}'_2$$

これが衝突現象の分析における基本の関係となる。



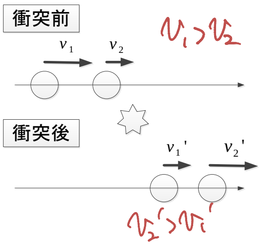
直線上の2物体の衝突（1次元の衝突）

2物体が同じ直線上を進行して衝突、再び同じ直線上で運動する場合。

運動量保存の式は

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$$

となる（ただし v_1, v_2, v'_1, v'_2 は速度ベクトルの x 成分のように正負の値を取り得る）



$v_1 > v_2$

$v_2' > v_1'$

はねかえり係数（反発係数）

衝突前の v_1, v_2 が既知でも、

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$$

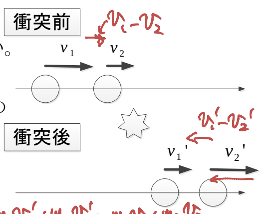
だけでは v'_1, v'_2 の値は決定しない。

はねかえり係数 e を、衝突前後の相対速度の比と定義する。

$$e = \frac{|v'_1 - v'_2|}{|v_1 - v_2|}\left(= -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2} \right)$$

これを与えれば解ける。

(なお e は $0 \le e \le 1$ の範囲となる)



$v_1 - v_2$

$v_2' - v_1'$

$m_1v_1' + m_2v_2' = m_1v_1 + m_2v_2$

$-v_1' + v_2' = e(v_1 - v_2)$

簡単な例（v_2=0, e =0）

$v_2 = 0$ なので運動量保存の式は

$$m_1v_1 = m_1v'_1 + m_2v'_2$$

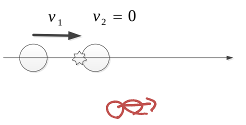
となる。また $e = 0$ であるので衝突後の相対速度は0、すなわち

$$v'_1 = v'_2$$

このとき

$$v'_1 = v'_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_1$$

となる。



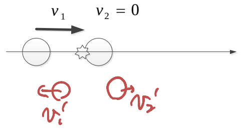
簡単な例（v_2=0, e =1）

運動量保存の式は同じく

$$m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2'$$

となる。また $e = 1$ より

$$v_1 = v_2' - v_1'$$



これらを連立させて解けば、

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1, \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1$$

となる。

$m_1 > m_2$ なら $v_1' > 0$

$m_1 < m_2$ なら $v_1' < 0$

非弾性衝突

衝突前後の運動エネルギーの和

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2, \quad K' = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

を計算してみる。

$v_2 = 0,\ e = 0$ の例では

$v_1' = v_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}v_1$

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2,$$

$$K' = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}v_1\right)^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2\frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}K$$

よって $K' < K \rightarrow$ 非弾性衝突

弾性衝突

$v_2 = 0,\ e = \cancel{0}\ 1$ の例では

$$K' = \frac{1}{2}m_1\left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{v_1^{\ 2}}{(m_1+m_2)^2}\left(m_1(m_1-m_2)^2 + 4m_2m_1^{\ 2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1v_1^{\ 2}}{(m_1+m_2)^2}\left((m_1-m_2)^2 + 4m_1m_2\right) = \frac{1}{2}m_1v_1^{\ 2} = K$$

$m_1^2 - 2m_1m_2 + m_2^2 + 4m_1m_2 = (m_1+m_2)^2$

よって $K' = K \rightarrow$ 弾性衝突

重心の運動と衝突

$V_G' = \dfrac{m_1v_1' + m_2v_2'}{m_1+m_2}$

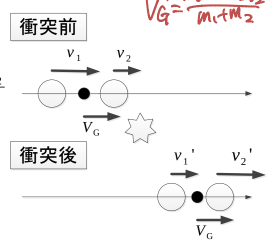
重心 $X_G = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1+m_2}$

$\Rightarrow$ 重心の速度 $V_G = \dfrac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1+m_2}$

運動量保存

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2$$

より $V_G = V'_G$, つまり重心の速度は衝突前後で不変。



相対速度と衝突

$(m_1+m_2)V_G = m_1v_1 + m_2v_2$

いま相対速度として

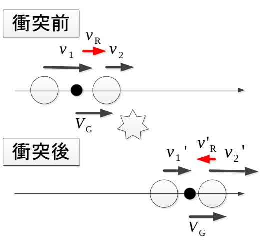
$$v_R \equiv v_1 - v_2$$

を定義すると、

$$v_1 = V_G + \frac{m_2}{m_1+m_2}v_R$$

$$v_2 = V_G - \frac{m_1}{m_1+m_2}v_R$$

となる。よって $e = -v'_R / v_R$ によって v_1', v'_2 も決まる。



重心速度・相対速度による運動エネルギーの表記

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^{\ 2} + \frac{1}{2}m_2v_2^{\ 2}$$

$$= \frac{1}{2}m_1\left(V_G + \frac{m_2}{m_1+m_2}v_R\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(V_G - \frac{m_1}{m_1+m_2}v_R\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}(m_1+m_2)V_G^{\ 2} + \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}v_R^{\ 2}$$

よって $e = 1$ ならば $K = K'$ であることがわかる。

なお $\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1+m_2}$ は換算質量と呼ばれる。

おまけ：相対座標による運動方程式

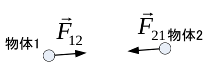
$\vec{r}_R = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ を定義すると、

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1},\quad \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2}\left(= -\frac{\vec{F}_{12}}{m_2}\right)$$

$\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2} = \dfrac{m_1+m_2}{m_1m_2} = \dfrac{1}{\mu}$

2式を辺々引いて

$$\frac{d^2\vec{r}_R}{dt^2} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12} = \frac{1}{\mu}\vec{F}_{12}$$



よって相対速度の運動方程式

$$\mu\frac{d^2\vec{r}_R}{dt^2} = \vec{F}_{12}$$

を解けば2物体の運動が決まる。

参考：2次元(3次元)の衝突問題

重心系で考えると考えやすい。要するに

$$\vec{v}_R \xrightarrow[\text{衝突}]{} \vec{v}'_R$$

の関係を与えれば衝突問題は解ける。

- 剛体球の衝突なら、衝突角を与える
- 2体間ポテンシャルによる衝突なら、衝突パラメータ＋角運動量保存の関係

などを使う（詳細知りたい人は、webにある江沢先生の参考書などを参照下さい）