

物理学 I (力学) 10 回目: ベクトルの外積と角運動量

中野武雄
2012年6月12日

8回目課題の解答(1)

Q: 重力加速度 $9.8 [\text{m/s}^2]$ のもと、地上 ($y=0$) から物体を $100 [\text{km/h}]$ で真上に投げ上げた。最高到達点では速度が 0 になることを利用して、到達点の高さを求めよ。

A: いつものように

$$100 [\text{km/h}] = 100 [\text{km/h}] \times \frac{1000 [\text{m}]}{1 [\text{km}]} \times \frac{1 [\text{h}]}{3600 [\text{s}]} = 27.78 [\text{m/s}]$$

最高点を y_{max} とすると力学的エネルギーの保存より

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + m g \times 0 = \frac{1}{2} m \times 0^2 + m g y_{\text{max}}$$

$$\text{よって } y_{\text{max}} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(27.78 [\text{m/s}])^2}{2 \times 9.8 [\text{m/s}^2]} = 39.4 [\text{m}]$$

8回目課題の解答(2)

Q: $100 [\text{km/h}]$ で、 45° 度上方に投げ上げた場合の到達点の高さを求めよ。このとき x 方向には等速度運動なので、最高到達点での速度は初速度の x 成分に等しいことを利用せよ。

A: 最高到達点では $|v| = v_x = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$ なので、

力学的エネルギー保存の式は

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + m g \times 0 = \frac{1}{2} m \left(\frac{v_0}{\sqrt{2}} \right)^2 + m g y_{\text{max}}$$

これを解いて

$$y_{\text{max}} = \frac{1}{2g} \left(v_0^2 - \frac{1}{2} v_0^2 \right) = \frac{v_0^2}{4g} = 19.7 [\text{m}]$$

8回目課題の解答(3-1)

Q: 1次元の単振動の運動方程式 $ma = -kx$ の解

$x(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$ (ただし $\omega = \sqrt{k/m}$) において、あらゆる時間 t において位置エネルギーと運動エネルギーの和が一定であることを示せ。

A: 位置を時間微分すると $v(t) = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t$
全力学的エネルギー E は

$$E = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$= \frac{1}{2} m (-\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t)^2 + \frac{1}{2} k (A \cos \omega t + B \sin \omega t)^2$$

8回目課題の解答(3-2)

$$E = \frac{1}{2} m (-\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t)^2 + \frac{1}{2} k (A \cos \omega t + B \sin \omega t)^2$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 (A^2 \sin^2 \omega t - 2AB \sin \omega t \cos \omega t + B^2 \cos^2 \omega t)$$

$$+ \frac{1}{2} k (A^2 \cos^2 \omega t + 2AB \sin \omega t \cos \omega t + B^2 \sin^2 \omega t)$$

$$= \frac{1}{2} k \{ A^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t) + B^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) \}$$

$$= \frac{1}{2} k (A^2 + B^2) \text{ よって時間 } t \text{ によらず一定。}$$

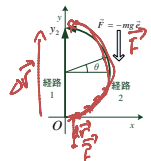
8回目課題の解答(4-1)

Q: 重力が $\vec{F} = -mg\vec{e}_y$ ($g = 9.8 [\text{m/s}^2]$) で与えられているとき、位置 $\vec{r}_1 = 0$ (原点) から $\vec{r}_2 = (1.0 [\text{m}])\vec{e}_y$ まで移動した物体が、この重力から受ける仕事を考える。経路が (1) 直進、(2) 中心 $(0, 0.5 [\text{m}])$ 、半径 $0.5 [\text{m}]$ の円に沿って移動、のときそれぞれについて、仕事 W_1, W_2 を線積分を用いて計算し、両者が一致することを示せ。

A: 経路の終点の y 座標を y_2 と置く。

経路1については

$$W_1 = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = |\vec{F}| |\Delta \vec{r}| \cos \pi = -mgy_2$$

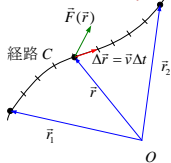


成分を用いた線積分の計算

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} \right) dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} F_x \frac{dx}{dt} dt + \int_{t_1}^{t_2} F_y \frac{dy}{dt} dt$$

なお t は $\vec{r} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y$ を定めれば良いのであって、必ずしも実際の時間そのものでなくても良い。



8回目課題の解答(4-2)

経路2については、半円の半径を $r (= y_2/2)$ として、 $x = r \cos \theta$, $y = r(1 + \sin \theta)$ とおける。

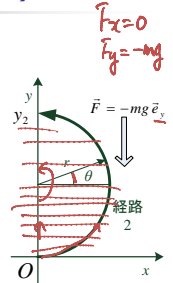
よって $\frac{dx}{d\theta} = -r \sin \theta$, $\frac{dy}{d\theta} = r \cos \theta$ なので、

$$W_2 = \int_{\text{経路2}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left\{ F_x \frac{dx}{d\theta} + F_y \frac{dy}{d\theta} \right\} d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} -mgr \cos \theta d\theta = [-mgr \sin \theta]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$

$$= -mgr(1 - (-1)) = -2mgr = -mgy_2$$

よって W_1 と W_2 は等しい。



今日の内容

- 前回のおさらい
 - 運動量と力積、運動量保存則
 - 2物体の衝突
- ベクトルの外積
 - 外積の定義
 - 具体的な計算のしかた・成分表示
- 角運動量
 - 角運動量の定義、トルク方程式
 - 角運動量の保存
 - 重力下の振子の運動

運動量と運動方程式

運動量: $\vec{p} \equiv m\vec{v}$ これを用いた運動方程式

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

の両辺を時間で積分すると、

$$\text{左辺} = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} dt = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)$$

$$\text{右辺} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \text{ は力積 } \vec{I} \text{ と定義}$$

すると $\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = \vec{I}$

- 運動量の変化は、与えられた力積に等しい

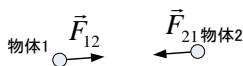
運動量保存則

- 力の働いていない物体

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \text{ より、} \vec{p} \text{ は時間によらず一定。}$$

- 力を及ぼしあう2物体

作用反作用の法則より、運動量の和は不変。



重心と全運動量

$$m_1 + m_2 + \dots + m_s = \sum_i m_i = M$$

$$\text{重心ベクトル } \vec{R}_G \equiv \sum_i \frac{m_i}{M} \vec{r}_i$$

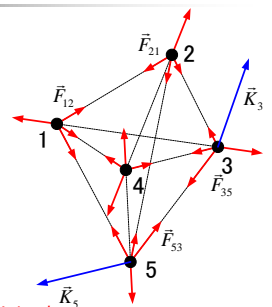
これを用いると全運動量は

$$\vec{P} = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = M \frac{d\vec{R}_G}{dt}$$

また

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_i m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \sum_i \vec{K}_i$$

外力が0なら全運動量 (= 重心の運動量) は不変



重心の運動と衝突

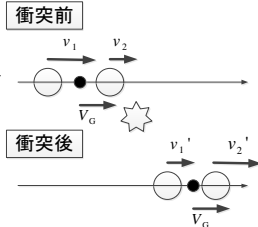
$$\text{重心 } X_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

$$\Rightarrow \text{重心の速度 } V_G = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

運動量保存

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

より $V_G = V_G'$, つまり重心の速度は衝突前後で不変。



相対速度と衝突

いま相対速度として

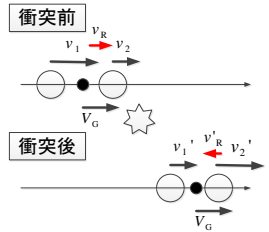
$$v_R = v_1 - v_2$$

を定義すると、

$$v_1 = V_G + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_R$$

$$v_2 = V_G - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_R$$

となる。よって $e = -v_R' / v_R$ によって v_1', v_2' も決まる。



ベクトルの外積

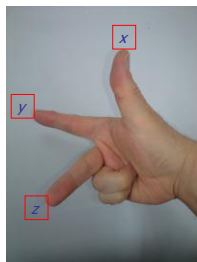
ベクトルの外積

- ベクトルとベクトルの積→結果はベクトル (内積の結果はスカラーでした)
- 3次元空間を舞台とする科学理論のいろいろところで利用される
 - 角運動量
 - コリオリの力(回転系での慣性力)
 - 電磁気学(ローレンツ力・フレミングの右手・左手則)
- 高校の物理・数学ではやらなかった(はず)
- たいていみんな最初は苦手(笑)

3次元デカルト座標系

■ 右手系

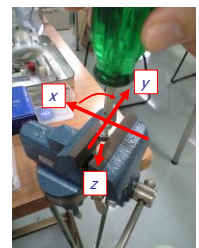
- x 軸の正の向き、y 軸の正の向きを選んだのち、z 軸の正の向きをどちらに選ぶか
- 親指-x、人差し指-y、中指-z
- 世界統一ルール



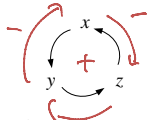
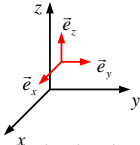
右手系=右ねじ系

■ 右ねじ系

- x 軸の正の向きから y 軸の正の向きに向かってドライバーを回転させるとき、ねじが進行する方向を z の正の方向と定義
- 角度の狭い方を通る



3次元デカルト座標系の 基準ベクトルとベクトルの外積



$$\begin{aligned} \vec{e}_x \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \times \vec{e}_y = \vec{e}_z \times \vec{e}_z = 0 \\ \vec{e}_x \times \vec{e}_y = \vec{e}_z, \quad \vec{e}_y \times \vec{e}_z = \vec{e}_x, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_x = \vec{e}_y \\ \vec{e}_y \times \vec{e}_x = -\vec{e}_z, \quad \vec{e}_z \times \vec{e}_y = -\vec{e}_x, \quad \vec{e}_x \times \vec{e}_z = -\vec{e}_y \end{aligned}$$

各種ルール

■ 外積

自分との外積:

$$\vec{A} \times \vec{A} = 0$$

交換法則:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

結合法則 (スカラー一倍):

$$(k\vec{A}) \times \vec{B} = \vec{A} \times (k\vec{B}) = k(\vec{A} \times \vec{B})$$

分配法則:

$$\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$$

■ (内積)

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A^2$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$(k\vec{A}) \cdot \vec{B} = \vec{A} \cdot (k\vec{B}) = k(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

外積の特徴

$$\vec{A} \times \vec{B} \perp \vec{A}, \quad \vec{A} \times \vec{B} \perp \vec{B}$$

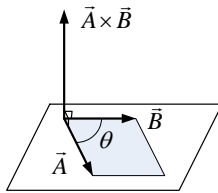
向きは「右ねじ則」

大きさ

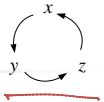
$$|\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$$

(平行四辺形の面積)

- 直交している2ベクトルの外積の大きさは $|\vec{A}||\vec{B}|$
- 平行だと0



外積の成分表示



$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z) \times (B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z) \\ &= A_x B_y \vec{e}_x \times \vec{e}_y + A_x B_z \vec{e}_x \times \vec{e}_z + A_x B_z \vec{e}_z \times \vec{e}_x \\ &\quad + A_y B_x \vec{e}_y \times \vec{e}_x + A_y B_z \vec{e}_y \times \vec{e}_z + A_y B_z \vec{e}_z \times \vec{e}_y \\ &\quad + A_z B_x \vec{e}_z \times \vec{e}_x + A_z B_y \vec{e}_z \times \vec{e}_y + A_z B_y \vec{e}_y \times \vec{e}_z \\ &= A_x B_y \vec{e}_z - A_x B_z \vec{e}_y - A_y B_x \vec{e}_z + A_y B_z \vec{e}_x + A_z B_x \vec{e}_y - A_z B_y \vec{e}_x \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \vec{e}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{e}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{e}_z \end{aligned}$$

行列式としても書ける

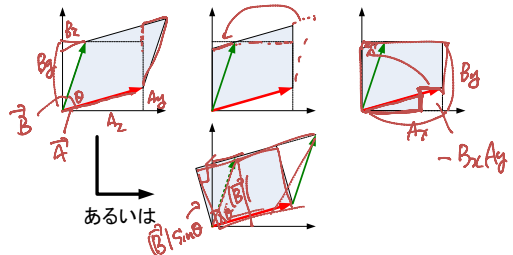
$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_y B_z \vec{e}_x + A_z B_x \vec{e}_y + A_x B_y \vec{e}_z) \\ &\quad - (A_x B_z \vec{e}_y + A_z B_y \vec{e}_x + A_y B_x \vec{e}_z) \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$



xy平面上にある2ベクトルでは:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + 0\vec{e}_z) \times (B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + 0\vec{e}_z) \\ &= (A_y B_x - 0B_x) \vec{e}_z + (0B_x - A_x 0) \vec{e}_y + (A_x B_y - 0B_y) \vec{e}_x \\ &= (A_y B_x - A_x B_y) \vec{e}_z \end{aligned}$$



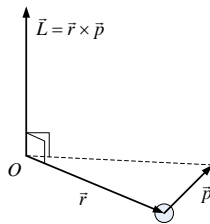
内積・外積の比較

	外積	内積
結果	ベクトル	スカラー
大きさ	$ \vec{A} \vec{B} \sin\theta$	$ \vec{A} \vec{B} \cos\theta$
$ \vec{A} \vec{B} $	0	$ \vec{A} \vec{B} $
$ \vec{A} \perp \vec{B} $	$ \vec{A} \vec{B} $	0

角運動量と保存則

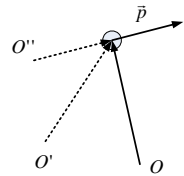
角運動量の定義

運動物体に対してある原点 O を置き、その原点から計測した位置ベクトル \vec{r} と運動量 $\vec{p}(=m\vec{v})$ とによって、角運動量 \vec{L} を
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$
 と定義する。



角運動量の性質

- 原点まわりの「回転運動」の大きさを示す量
 - 位置ベクトルと速度ベクトルが平行ならば0
 - 位置ベクトルと速度ベクトルが直交していれば最大値
- 原点の取りかたによって値が異なる
 - 一般に速度ベクトルは原点の取り方に寄らずに決まるが、位置ベクトルは原点が変わると異なった値を取る



運動方程式と角運動量

運動方程式 $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ の両辺と \vec{r} の外積を取る

$$\vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

いま角運動量 \vec{L} の時間微分は

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

いま第一項は $\vec{v} \parallel \vec{p}$ より0。よって

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Handwritten notes:
 $\vec{v} \parallel \vec{p} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0$
 $\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = 0$

力のモーメント(トルク)

角運動量の時間変化を与える式

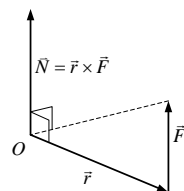
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

の右辺をトルクと定義する

$$\vec{N} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$$

すると

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \quad \text{■ トルク方程式}$$



質点系での角運動量保存

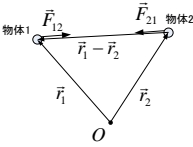
第三法則より $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ 、また

これらの力は互いを結ぶ直線上にあるから

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \parallel \vec{F}_{12} \Rightarrow (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = 0$$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} - \vec{r}_2 \times (-\vec{F}_{21}) = 0$$

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \frac{d}{dt}(\vec{L}_1 + \vec{L}_2) = 0$$



- 運動量の場合と同様に、質点系における全角運動量は、内力によっては変化しない

(原点のとりかたによる)

中心力と角運動量の保存

- 中心力: 原点の方向(あるいはその逆)を向く力

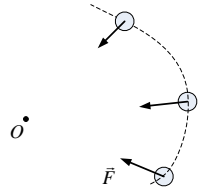
$$\vec{r} \parallel \vec{F} \Rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = 0,$$

つまり中心力のトルクは0.

このとき

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

したがって \vec{L} は時間によって変化しない



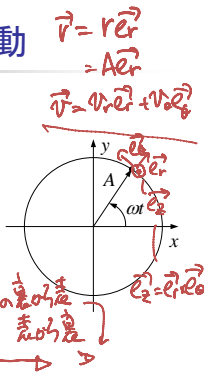
振り回り: 等速円運動

$$r(t) = A (\text{一定}), \quad \theta(t) = \omega t$$

$$v_r = \frac{dr}{dt} = 0, \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} = A\omega$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = mA\omega \quad (\text{一定})$$

$$\text{よって } \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$

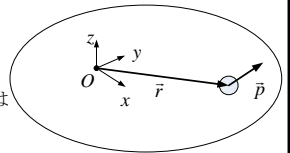


参考: 中心力 → 平面運動

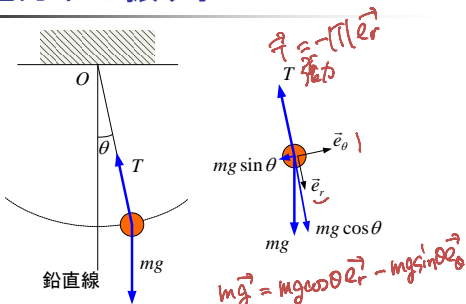
- 物体の初期状態として、位置ベクトルと運動量が決まるとすると、その2ベクトルを含む平面を定義可能

この平面に x 軸、 y 軸を定めると、 $p_{z,0} = 0$ かつ

$$F_z = \frac{dp_z}{dt} = 0 \text{ なので、運動はこの面内に留まる。}$$



重力下の振り子



重力下の振り子: 運動方程式

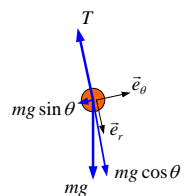
$$r \text{ 成分: } ma_r = m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = f_r$$

$$\theta \text{ 成分: } ma_\theta = m \left[\frac{2}{r} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right] = f_\theta$$

$r = l$ (定数) を考慮に入れると

$$-ml \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = mg \cos \theta - T$$

$$m \left[\frac{2}{l} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} l^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right] = -mg \sin \theta \Rightarrow l \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -g \sin \theta$$



重力下の振り子:トルク方程式

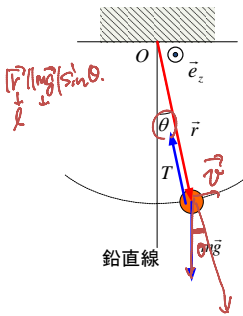
$$\vec{r} \times (m\vec{g} + \vec{T}) = \vec{r} \times m\vec{g} + \vec{r} \times \vec{T}$$

$$\vec{N} = \vec{r} \times (m\vec{g}) = -lmg \sin \theta \vec{e}_z$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = l \left(ml \frac{d\theta}{dt} \right) \vec{e}_z$$

よってトルク方程式より

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \Rightarrow l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta$$



重力下の振り子: thetaが微小のときの解

$$l \frac{d^2\theta}{dt^2} = -g \sin \theta \approx -g\theta$$

これは単振動の方程式と同じ形式。

$$\omega^2 \equiv \frac{g}{l} \Leftrightarrow \omega \equiv \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ と置けば、}$$

$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t + \phi_0)$ は運動方程式の解。

$$\text{このとき周期 } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(\approx \frac{2\pi \sqrt{l}}{9.8 \text{ (m/s}^2\text{)}} \right)$$

$\theta \ll 1$
 $\sin \theta \sim \theta$

$\frac{d\theta}{dt} = g\theta$

$m \frac{d^2z}{dt^2} = -kz$

$A \cos \omega t + B \sin \omega t$

$f = C \sin(\omega t + \phi)$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\left(\frac{m}{m/s^2} \right)^{1/2} = (s)$

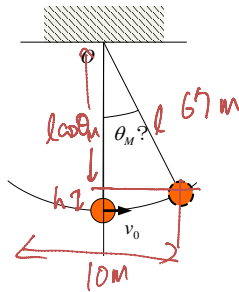
初速と最大振れ角の関係

張力Tは仕事をしないので、
エネルギー保存則から

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = mgh$$

$$= mgl(1 - \cos \theta_M)$$

$$\cos \theta_M = 1 - \frac{v_0^2}{2gl}$$



参考:振り子のエネルギー保存

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

$\theta = 0$ において $v = v_0$ より、

$$\frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$C_2 = v_0^2 - 2gl$$

よって

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) = \frac{g}{l} \frac{d}{dt} (\cos \theta + C)$$

$$v^2 + 2gl(1 - \cos \theta) = v_0^2$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = \frac{2g}{l} \cos \theta + C_2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v^2 + mgl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2} m v_0^2$$

$$v^2 = 2gl \cos \theta + C_2$$