物理学 I（力学）10 回目：ベクトルの外積と角運動量

中野武雄

2012年6月12日

8回目課題の解答(1)

Q: 重力加速度 9.8 [m/s] のもと、地上(y=0)から物体を 100 [km/h] で真上に投げ上げた。最高到達点では速度が0になることを利用して、到達点の高さを求めよ。

A いつものように

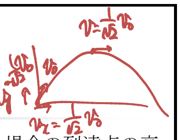
$$100[\mathrm{km/h}] = 100[\mathrm{km/h}] \times \frac{1000[\mathrm{m}]}{1[\mathrm{km}]} \times \frac{1[\mathrm{h}]}{3600[\mathrm{s}]} = 27.78[\mathrm{m/s}]$$

最高点を y_{max} とすると力学的エネルギーの保存より

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 + mg \times 0 = \frac{1}{2}m \times 0^2 + mgy_{max}$$

よって $y_{max} = \dfrac{{v_0}^2}{2g} = \dfrac{(27.78[\mathrm{m/s}])^2}{2 \times 9.8[\mathrm{m/s^2}]} = 39.4[\mathrm{m}]$

8回目課題の解答(2)



Q: 100 [km/h] で、45度上方に投げ上げた場合の到達点の高さを求めよ。このとき x 方向には等速度運動なので、最高到達点での速度は初速度の x 成分に等しいことを利用せよ。

A: 最高到達点では $|v| = v_x = \dfrac{v_0}{\sqrt{2}}$ なので、

力学的エネルギー保存の式は

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 + mg \times 0 = \frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{\sqrt{2}}\right)^2 + mgy_{max}$$

これを解いて

$$y_{max} = \frac{1}{2g}\left({v_0}^2 - \frac{1}{2}{v_0}^2\right) = \frac{{v_0}^2}{4g} = 19.7[\mathrm{m}]$$

8回目課題の解答(3-1)

$\omega^2 = \frac{k}{m}$

$m\omega^2 = k$

Q: 1次元の単振動の運動方程式 $ma = -kx$ の解 $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$（ただし $\omega = \sqrt{k/m}$）において、あらゆる時間 t において位置エネルギーと運動エネルギーの和が一定であることを示せ。

A: 位置を時間微分すると $v(t) = -\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t$

全力学的エネルギー E は

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{1}{2}m(-\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t)^2 + \frac{1}{2}k(A\cos\omega t + B\sin\omega t)^2$$

8回目課題の解答(3-2)

$$E = \frac{1}{2}m(-\omega A\sin\omega t + \omega B\cos\omega t)^2 + \frac{1}{2}k(A\cos\omega t + B\sin\omega t)^2$$

$$= \frac{1}{2}\overset{k}{\cancel{m\omega^2}}\left(A^2\sin^2\omega t - \cancel{2AB\sin\omega t\cos\omega t} + B^2\cos^2\omega t\right)$$

$$+ \frac{1}{2}k\left(A^2\cos^2\omega t + \cancel{2AB\sin\omega t\cos\omega t} + B^2\sin^2\omega t\right)$$

$$= \frac{1}{2}k\left\{A^2\left(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t\right) + B^2\left(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right)\right\}$$

$= \frac{1}{2}k\left(A^2 + B^2\right)$ よって時間 t によらず一定。 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

8回目課題の解答(4-1)

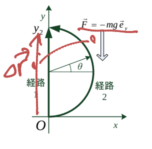
Q: 重力が $\vec{F} = -mg\vec{e}_y$ ($g = 9.8[\mathrm{m/s^2}]$) で与えられているとき、位置 $\vec{r}_1 = O$（原点）から $\vec{r}_2 = (1.0[\mathrm{m}])\vec{e}_y$ まで移動した物体が、この重力から受ける仕事を考える。経路が (1) 直進、(2) 中心(0, 0.5 [m])、半径 0.5 [m] の円に沿って移動、のときそれぞれについて、仕事 W_1、W_2 を線積分を用いて計算し、両者が一致することを示せ。

$\Delta\vec{r}$

A: 経路の終点の y 座標を y_2 と置く。

経路1については

$$W_1 = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = |\vec{F}||\Delta\vec{r}|\cos\pi = -mgy_2$$

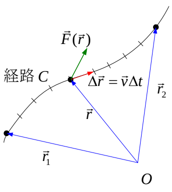


成分を用いた線積分の計算

$\vec{F}=F_x\vec{e_x}+F_y\vec{e_y}$

$\vec{v}=\frac{dx}{dt}\vec{e_x}+\frac{dy}{dt}\vec{e_y}$

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\cdot\vec{v}dt=\int_{t_1}^{t_2}\left(F_x\frac{dx}{dt}+F_y\frac{dy}{dt}\right)dt$$
$$=\int_{t_1}^{t_2}F_x\frac{dx}{dt}dt+\int_{t_1}^{t_2}F_y\frac{dy}{dt}dt$$



なお t は $\vec{r}=x(t)\vec{e}_x+y(t)\vec{e}_y$ を定めれば良いのであって、必ずしも実際の時間そのものでなくても良い。

8回目課題の解答(4-2)

$F_x=0$

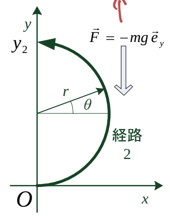
$F_y=-mg$

経路2については、半円の半径を $r(=y_2/2)$ として、$x=r\cos\theta$、$y=r(1+\sin\theta)$ とおける。

よって $\frac{dx}{d\theta}=-r\sin\theta$、$\frac{dy}{d\theta}=r\cos\theta$ なので、

$$W_2=\int_{経路2}\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left\{F_x\frac{dx}{d\theta}+F_y\frac{dy}{d\theta}\right\}d\theta$$
$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}-mgr\cos\theta\,d\theta=\left[-mgr\sin\theta\right]_{-\pi/2}^{\pi/2}$$
$$=-mgr(1-(-1))=-2mgr=-mgy_2$$

よって W_1 と W_2 は等しい。



今日の内容

- 前回のおさらい
  - 運動量と力積、運動量保存則
  - 2物体の衝突
- ベクトルの外積
  - 外積の定義
  - 具体的な計算のしかた・成分表示
- 角運動量
  - 角運動量の定義、トルク方程式
  - 角運動量の保存
  - 重力下の振子の運動

運動量と運動方程式

運動量：$\vec{p}\equiv m\vec{v}$ これを用いた運動方程式

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$$

の両辺を時間で積分すると、

$$左辺=\int_{t_1}^{t_2}\frac{d\vec{p}}{dt}dt=\vec{p}(t_2)-\vec{p}(t_1)$$

$右辺=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$ は力積 $\vec{I}$ と定義

すると $\vec{p}(t_2)-\vec{p}(t_1)=\vec{I}$

- 運動量の変化は、与えられた力積に等しい

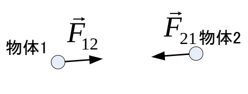
運動量保存則

- 力の働いていない物体

  $\frac{d\vec{p}}{dt}=0$ より、$\vec{p}$ は時間によらず一定。

- 力を及ぼしあう2物体

  作用反作用の法則より、運動量の和は不変。



重心と全運動量

$$m_1+m_2+\cdots+m_5=\sum_i m_i=M$$

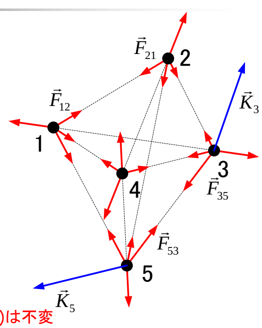
重心ベクトル $\vec{R}_G\equiv\sum_i\frac{m_i}{M}\vec{r}_i$

これを用いると全運動量は

$$\vec{P}=\sum_i m_i\frac{d\vec{r}_i}{dt}=M\frac{d\vec{R}_G}{dt}$$

また

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\sum_i m_i\frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}=\sum_i K_i$$



外力が0なら全運動量(=重心の運動量)は不変

重心の運動と衝突

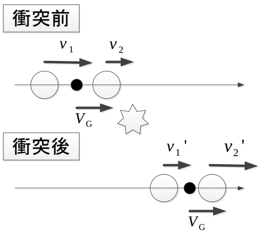
重心 $X_G = \dfrac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$

$\Rightarrow$ 重心の速度$V_G = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$

運動量保存

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

より$V_G = V'_G$, つまり重心の速度は衝突前後で不変。



相対速度と衝突

いま相対速度として

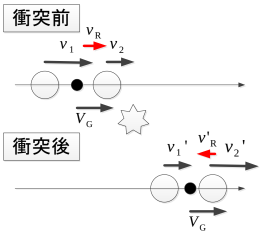
$$v_R \equiv v_1 - v_2$$

を定義すると、

$$v_1 = V_G + \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_R$$

$$v_2 = V_G - \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_R$$

となる。よって$e = -v'_R / v_R$によってv_1', v'_2も決まる。

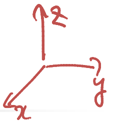


ベクトルの外積

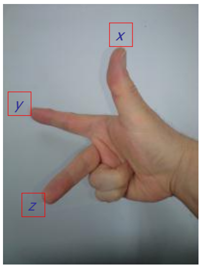
ベクトルの外積

- ベクトルとベクトルの積→結果はベクトル（内積の結果はスカラーでした）
- 3次元空間を舞台とする科学理論のいろいろなところで利用される
  - 角運動量
  - コリオリの力（回転系での慣性力）
  - 電磁気学（ローレンツカ・フレミングの右手・左手則）
- 高校の物理・数学ではやらなかった（はず）
- たいていみんな最初は苦手（笑）

3次元デカルト座標系



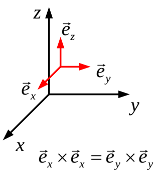
- 右手系
  - x 軸の正の向き、y軸の正の向きを選んだのち、z 軸の正の向きをどちらに選ぶか
  - 親指ーx、人差し指ーy、中指ーz
  - 世界統一ルール

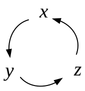


右手系=右ねじ系

- 右ねじ系
  - x 軸の正の向きから y 軸の正の向きに向かってドライバーを回転させるとき、ねじが進行する方向を z の正の方向と定義
  - 角度の狭い方を通る

3次元デカルト座標系の基準ベクトルとベクトルの外積





$$\vec{e}_x\times\vec{e}_x=\vec{e}_y\times\vec{e}_y=\vec{e}_z\times\vec{e}_z=0$$
$$\vec{e}_x\times\vec{e}_y=\vec{e}_z,\quad \vec{e}_y\times\vec{e}_z=\vec{e}_x,\quad \vec{e}_z\times\vec{e}_x=\vec{e}_y$$
$$\vec{e}_y\times\vec{e}_x=-\vec{e}_z,\quad \vec{e}_z\times\vec{e}_y=-\vec{e}_x,\quad \vec{e}_x\times\vec{e}_z=-\vec{e}_y$$

各種ルール

- 外積
- （内積）

自分との外積：

$\vec{A}\times\vec{A}=0$ $\qquad$ $\vec{A}\cdot\vec{A}=A^2$

交換法則：

$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$ $\qquad$ $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$

結合法則（スカラー倍）：

$(k\vec{A})\times\vec{B}=\vec{A}\times(k\vec{B})=k(\vec{A}\times\vec{B})$ $\qquad$ $(k\vec{A})\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot(k\vec{B})=k(\vec{A}\cdot\vec{B})$

分配法則：

$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$ $\qquad$ $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

外積の特徴

① 裏から表 ② 表から裏

$\vec{A}\times\vec{B}\perp\vec{A},\quad \vec{A}\times\vec{B}\perp\vec{B}$

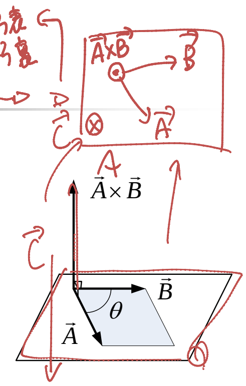
向きは「右ねじ則」

大きさ

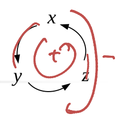
$$|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$$

（平行四辺形の面積）

- 直交している2ベクトルの外積の大きさは$|\vec{A}||\vec{B}|$
- 平行だと0



外積の成分表示

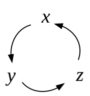


$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B}&=(A_x\vec{e}_x+A_y\vec{e}_y+A_z\vec{e}_z)\times(B_x\vec{e}_x+B_y\vec{e}_y+B_z\vec{e}_z)\\&=A_xB_x\vec{e}_x\times\vec{e}_x+A_xB_y\vec{e}_x\times\vec{e}_y+A_xB_z\vec{e}_x\times\vec{e}_z\\&\quad+A_yB_x\vec{e}_y\times\vec{e}_x+A_yB_y\vec{e}_y\times\vec{e}_y+A_yB_z\vec{e}_y\times\vec{e}_z\\&\quad+A_zB_x\vec{e}_z\times\vec{e}_x+A_zB_y\vec{e}_z\times\vec{e}_y+A_zB_z\vec{e}_z\times\vec{e}_z\\&=A_xB_y\vec{e}_z-A_xB_z\vec{e}_y-A_yB_x\vec{e}_z+A_yB_z\vec{e}_x+A_zB_x\vec{e}_y-A_zB_y\vec{e}_x\\&=(A_yB_z-A_zB_y)\vec{e}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\vec{e}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\vec{e}_z\end{aligned}$$

行列式としても書ける

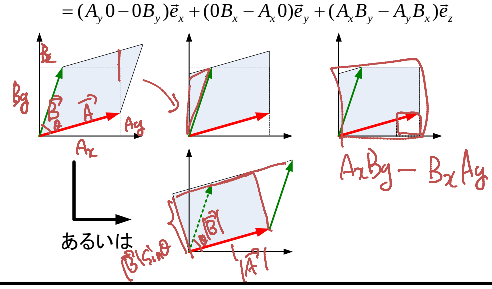
$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_yB_z\vec{e}_x+A_zB_x\vec{e}_y+A_xB_y\vec{e}_z$$
$$-(A_zB_y\vec{e}_x+A_xB_z\vec{e}_y+A_yB_x\vec{e}_z)$$
$$=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

(+) (−)



xy平面上にある2ベクトルでは：

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_x\vec{e}_x+A_y\vec{e}_y+0\vec{e}_z)\times(B_x\vec{e}_x+B_y\vec{e}_y+0\vec{e}_z)$$
$$=(A_y0-0B_y)\vec{e}_x+(0B_x-A_x0)\vec{e}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\vec{e}_z$$



内積・外積の比較

	外積	内積
結果	ベクトル	スカラー
大きさ	$\lvert\vec{A}\rvert\lvert\vec{B}\rvert\sin\theta$	$\lvert\vec{A}\rvert\lvert\vec{B}\rvert\cos\theta$
$\lvert\vec{A}\rvert // \lvert\vec{B}\rvert$	0	$\lvert\vec{A}\rvert\lvert\vec{B}\rvert$
$\lvert\vec{A}\rvert \perp \lvert\vec{B}\rvert$	$\lvert\vec{A}\rvert\lvert\vec{B}\rvert$	0

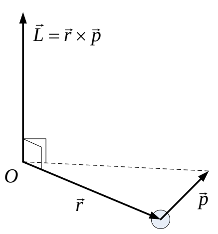
角運動量と保存則

角運動量の定義

運動物体に対してある原点Oを置き、その原点から計測した位置ベクトル$\vec{r}$と運動量$\vec{p}(=m\vec{v})$とによって、角運動量$\vec{L}$を

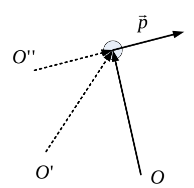
$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$$

と定義する。



角運動量の性質

- 原点まわりの「回転運動」の大きさを示す量
  - 位置ベクトルと速度ベクトルが平行ならば0
  - 位置ベクトルと速度ベクトルが直交していれば最大値
- 原点の取りかたによって値が異なる
  - 一般に速度ベクトルは原点の取り方に寄らずに決まるが、位置ベクトルは原点が変わると異なった値を取る



運動方程式と角運動量

運動方程式 $\dfrac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$ の両辺と$\vec{r}$の外積を取る

$$\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}$$

いま角運動量$\vec{L}$の時間微分は

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

いま第一項は$\vec{v}//\vec{p}$より0。よって

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}$$

力のモーメント(トルク)

角運動量の時間変化を与える式

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}$$

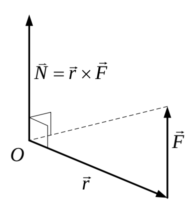
の右辺をトルクと定義する

$$\vec{N}\equiv\vec{r}\times\vec{F}$$

すると

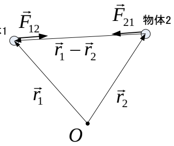
$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N}$$

- トルク方程式



質点系での角運動量保存

第三法則より $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$、また
これらの力は互いを結ぶ直線上にあるから



$$(\vec{r}_1-\vec{r}_2)//\vec{F}_{12} \Rightarrow (\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times\vec{F}_{12}=0$$

$$\vec{r}_1\times\vec{F}_{12}-\vec{r}_2\times\left(-\vec{F}_{21}\right)=0$$

$$\vec{N}_1+\vec{N}_2=\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_1+\vec{L}_2\right)=0$$

- 運動量の場合と同様に、質点系における全角運動量は、内力によっては変化しない

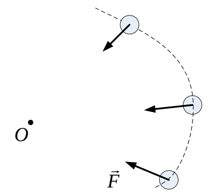
中心力と角運動量の保存

- 中心力：原点の方向（あるいはその逆）を向く力

$\vec{r}\,//\,\vec{F} \Rightarrow \vec{r}\times\vec{F}=0$、
つまり中心力のトルクは0。
このとき

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=0$$

したがって$\vec{L}$は時間によって変化しない



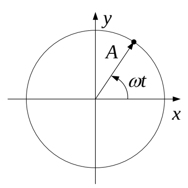
振り返り：等速円運動

$r(t)=A$(一定), $\theta(t)=\omega t$

$v_r=\dfrac{dr}{dt}=0,\quad v_\theta=r\dfrac{d\theta}{dt}=A\omega$

$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{v}=mA\omega$（一定）

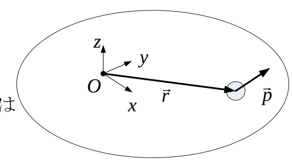
よって$\dfrac{d\vec{L}}{dt}=0$



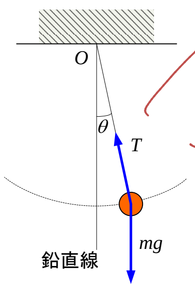
参考：中心力→平面運動

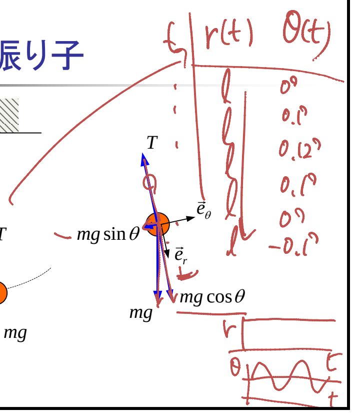
- 物体の初期状態として、位置ベクトルと運動量が決まったとすると、その 2 ベクトルを含む平面を定義可能

この平面にx軸、y軸を定めると、$p_{z0}=0$ かつ
$F_z=\dfrac{dp_z}{dt}=0$なので、運動はこの面内に留まる。



重力下の振り子





重力下の振り子：運動方程式

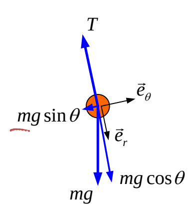
r 成分：$ma_r=m\left\{\dfrac{d^2r}{dt^2}-r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\right\}=f_r$

θ 成分：$ma_\theta=m\left\{\dfrac{2}{r}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right)\right\}=f_\theta$

$r=l$（定数)を考慮に入れると

$$-ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\underbrace{mg\cos\theta-T}_{f_r}$$

$$m\left\{\frac{2}{l}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}l^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right\}=\underbrace{-mg\sin\theta}_{f_\theta}\Rightarrow l\frac{d^2\theta}{dt^2}=-g\sin\theta$$



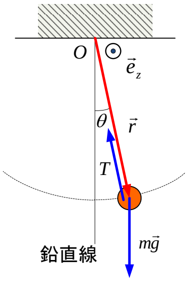
重力下の振り子：トルク方程式

$\vec{N} = \vec{r} \times (m\vec{g}) = -lmg\sin\theta\,\vec{e}_z$

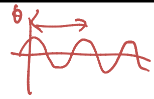
$\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = l\left(ml\dfrac{d\theta}{dt}\right)\vec{e}_z$

よってトルク方程式より

$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \Rightarrow l\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta$



重力下の振り子：θが微小のときの解



$\theta \ll 1$

$\sin\theta \sim \theta$

$l\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta \approx -g\theta$

これは単振動の方程式と同じ形式。 $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$

$\omega^2 \equiv \dfrac{g}{l} \Leftrightarrow \omega \equiv \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ と置けば、

$\theta(t) = \theta_0\sin(\omega t + \phi_0)$ は運動方程式の解。

$\dfrac{d\theta}{dt} = \omega\theta_0\cos(\omega t+\phi)$

$\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega^2\theta_0\sin(\omega t+\phi) = -\omega^2\theta(t)$

$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{67}{9.8}}\left[\dfrac{m}{m/s^2}\right]^{\frac{1}{2}} \rightarrow$ ○○ [s]

このとき周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

$g = 9.8\,[m/s^2]$　$l = 67\,[m]$

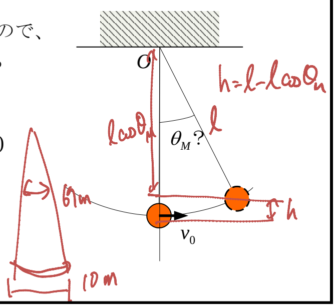
初速と最大振れ角の関係

張力Tは仕事をしないので、
エネルギー保存則から

$\dfrac{1}{2}m{v_0}^2 = mgh$

$= mgl(1-\cos\theta_M)$

$\cos\theta_M = 1 - \dfrac{{v_0}^2}{2gl}$



参考：振り子のエネルギー保存

$\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{g}{l}\sin\theta$

$\dfrac{d\theta}{dt}\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -\dfrac{g}{l}\sin\theta\dfrac{d\theta}{dt}$

$\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\right) = \dfrac{g}{l}\dfrac{d}{dt}(\cos\theta + C)$

$\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2 = \dfrac{2g}{l}\cos\theta + C_2$

$v^2 = 2gl\cos\theta + C_2$

$\theta = 0$ において $v = v_0$ より、

$C_2 = {v_0}^2 - 2gl$

よって

$v^2 + 2gl(1-\cos\theta) = {v_0}^2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}mv^2 + mgl(1-\cos\theta) = \dfrac{1}{2}m{v_0}^2$