物理学 I（力学）10 回目：ベクトルの外積と角運動量

中野武雄

2012年6月12日

今日の内容

- 前回のおさらい
  - 運動量と力積、運動量保存則
  - 2物体の衝突
- ベクトルの外積
  - 外積の定義
  - 具体的な計算のしかた・成分表示
- 角運動量
  - 角運動量の定義、トルク方程式
  - 角運動量の保存
  - 重力下の振子の運動

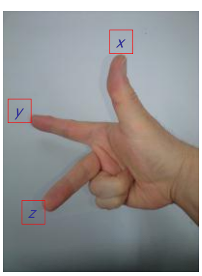
ベクトルの外積

ベクトルの外積

- ベクトルとベクトルの積→結果はベクトル（内積の結果はスカラーでした）
- 3次元空間を舞台とする科学理論のいろいろなところで利用される
  - 角運動量
  - コリオリの力（回転系での慣性力）
  - 電磁気学（ローレンツカ・フレミングの右手・左手則）
- 高校の物理・数学ではやらなかった（はず）
- たいていみんな最初は苦手（笑）

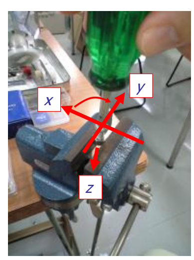
3次元デカルト座標系

- 右手系
  - x 軸の正の向き、y軸の正の向きを選んだのち、z 軸の正の向きをどちらに選ぶか
  - 親指ーx、人差し指ーy、中指ーz
  - 世界統一ルール

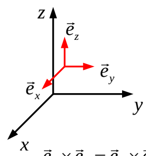


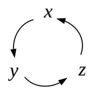
右手系＝右ねじ系

- 右ねじ系
  - x 軸の正の向きから y 軸の正の向きに向かってドライバーを回転させるとき、ねじが進行する方向を z の正の方向と定義
  - 角度の狭い方を通る



3次元デカルト座標系の基準ベクトルとベクトルの外積





$$\vec{e}_x\times\vec{e}_x=\vec{e}_y\times\vec{e}_y=\vec{e}_z\times\vec{e}_z=0$$

$$\vec{e}_x\times\vec{e}_y=\vec{e}_z,\quad \vec{e}_y\times\vec{e}_z=\vec{e}_x,\quad \vec{e}_z\times\vec{e}_x=\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_y\times\vec{e}_x=-\vec{e}_z,\quad \vec{e}_z\times\vec{e}_y=-\vec{e}_x,\quad \vec{e}_x\times\vec{e}_z=-\vec{e}_y$$

各種ルール

- 外積
- （内積）

自分との外積：

$\vec{A}\times\vec{A}=0$ $\qquad$ $\vec{A}\cdot\vec{A}=A^2$

交換法則：

$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$ $\qquad$ $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$

結合法則（スカラー倍）：

$(k\vec{A})\times\vec{B}=\vec{A}\times(k\vec{B})=k(\vec{A}\times\vec{B})$ $\qquad$ $(k\vec{A})\cdot\vec{B}=\vec{A}\cdot(k\vec{B})=k(\vec{A}\cdot\vec{B})$

分配法則：

$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$ $\qquad$ $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C})=\vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}$

外積の特徴

$\vec{A}\times\vec{B}\perp\vec{A},\quad \vec{A}\times\vec{B}\perp\vec{B}$

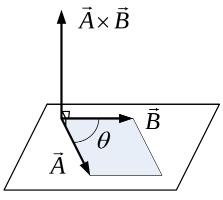
向きは「右ねじ則」

大きさ

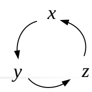
$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta$$

（平行四辺形の面積）

- 直交している2ベクトルの外積の大きさは$\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|$
- 平行だと0



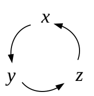
外積の成分表示



$$\begin{aligned}
\vec{A}\times\vec{B}&=(A_x\vec{e}_x+A_y\vec{e}_y+A_z\vec{e}_z)\times(B_x\vec{e}_x+B_y\vec{e}_y+B_z\vec{e}_z)\\
&=A_xB_x\,\vec{e}_x\times\vec{e}_x+A_xB_y\,\vec{e}_x\times\vec{e}_y+A_xB_z\,\vec{e}_x\times\vec{e}_z\\
&\quad+A_yB_x\,\vec{e}_y\times\vec{e}_x+A_yB_y\,\vec{e}_y\times\vec{e}_y+A_yB_z\,\vec{e}_y\times\vec{e}_z\\
&\quad+A_zB_x\,\vec{e}_z\times\vec{e}_x+A_zB_y\,\vec{e}_z\times\vec{e}_y+A_zB_z\,\vec{e}_z\times\vec{e}_z\\
&=A_xB_y\vec{e}_z-A_xB_z\vec{e}_y-A_yB_x\vec{e}_z+A_yB_z\vec{e}_x+A_zB_x\vec{e}_y-A_zB_y\vec{e}_x\\
&=(A_yB_z-A_zB_y)\vec{e}_x+(A_zB_x-A_xB_z)\vec{e}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\vec{e}_z
\end{aligned}$$

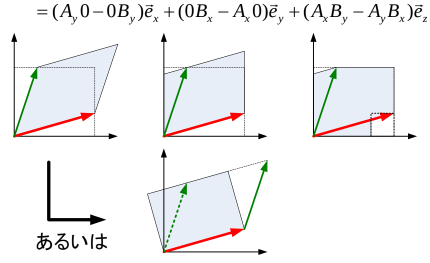
行列式としても書ける

$$\begin{aligned}
\vec{A}\times\vec{B}&=(A_yB_z\vec{e}_x+A_zB_x\vec{e}_y+A_xB_y\vec{e}_z\\
&\quad-(A_zB_y\vec{e}_x+A_xB_z\vec{e}_y+A_yB_x\vec{e}_z\\
&=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}
\end{aligned}$$



xy平面上にある2ベクトルでは：

$$\begin{aligned}
\vec{A}\times\vec{B}&=(A_x\vec{e}_x+A_y\vec{e}_y+0\vec{e}_z)\times(B_x\vec{e}_x+B_y\vec{e}_y+0\vec{e}_z)\\
&=(A_y0-0B_y)\vec{e}_x+(0B_x-A_x0)\vec{e}_y+(A_xB_y-A_yB_x)\vec{e}_z
\end{aligned}$$



内積・外積の比較

	外積	内積
結果	ベクトル	スカラー
大きさ	$\lvert\vec{A}\rvert\lvert\vec{B}\rvert\sin\theta$	$\lvert\vec{A}\rvert\lvert\vec{B}\rvert\cos\theta$
$\lvert\vec{A} /\!/ \vec{B}\rvert$	0	$\lvert\vec{A}\rvert\lvert\vec{B}\rvert$
$\lvert\vec{A}\perp\vec{B}\rvert$	$\lvert\vec{A}\rvert\lvert\vec{B}\rvert$	0

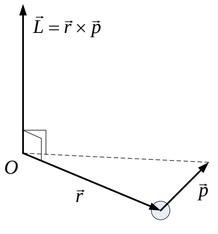
角運動量と保存則

角運動量の定義

運動物体に対してある原点Oを置き、その原点から計測した位置ベクトル$\vec{r}$と運動量$\vec{p}(=m\vec{v})$とによって、角運動量$\vec{L}$を

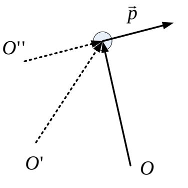
$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$$

と定義する。



角運動量の性質

- 原点まわりの「回転運動」の大きさを示す量
  - 位置ベクトルと速度ベクトルが平行ならば0
  - 位置ベクトルと速度ベクトルが直交していれば最大値
- 原点の取りかたによって値が異なる
  - 一般に速度ベクトルは原点の取り方に寄らずに決まるが、位置ベクトルは原点が変わると異なった値を取る



運動方程式と角運動量

運動方程式 $\dfrac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$ の両辺と$\vec{r}$の外積を取る

$$\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}$$

いま角運動量$\vec{L}$の時間微分は

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

いま第一項は$\vec{v}/\!/\vec{p}$より0。よって

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}$$

力のモーメント(トルク)

角運動量の時間変化を与える式

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}$$

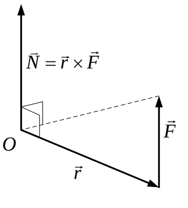
の右辺をトルクと定義する

$$\vec{N}\equiv\vec{r}\times\vec{F}$$

すると

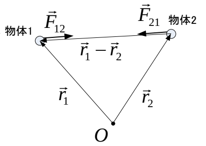
$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N}$$

- トルク方程式



質点系での角運動量保存

第三法則より $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$、また
これらの力は互いを結ぶ直線上にあるから



$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) // \vec{F}_{12} \Rightarrow (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = 0$

$\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} - \vec{r}_2 \times \left(-\vec{F}_{21}\right) = 0$

$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \frac{d}{dt}\left(\vec{L}_1 + \vec{L}_2\right) = 0$

- 運動量の場合と同様に、質点系における全角運動量は、内力によっては変化しない

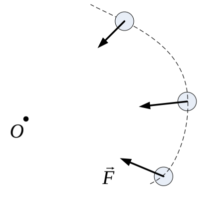
中心力と角運動量の保存

- 中心力：原点の方向（あるいはその逆）を向く力

$\vec{r} // \vec{F} \Rightarrow \vec{r} \times \vec{F} = 0$、
つまり中心力のトルクは0。
このとき

$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$

したがって$\vec{L}$は時間によって変化しない



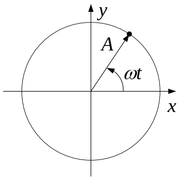
振り返り：等速円運動

$r(t) = A(一定),\quad \theta(t) = \omega t$

$v_r = \frac{dr}{dt} = 0,\quad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt} = A\omega$

$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = mA\omega$（一定）

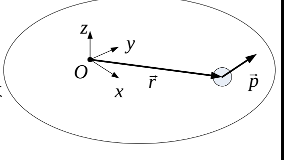
よって$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$



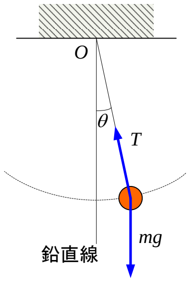
参考：中心力→平面運動

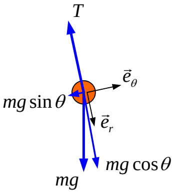
- 物体の初期状態として、位置ベクトルと運動量が決まったとすると、その 2 ベクトルを含む平面を定義可能

この平面にx軸、y軸を定めると、$p_{z0} = 0$ かつ
$F_z = \frac{dp_z}{dt} = 0$なので、運動はこの面内に留まる。



重力下の振り子





重力下の振り子：運動方程式

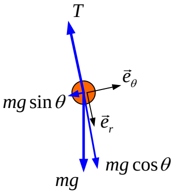
r 成分：$ma_r = m\left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\} = f_r$

θ 成分：$ma_\theta = m\left\{\frac{2}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right\} = f_\theta$

$r = l$（定数）を考慮に入れると

$-ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg\cos\theta - T$

$m\left\{\frac{2}{l}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}l^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right\} = -mg\sin\theta \Rightarrow l\frac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta$



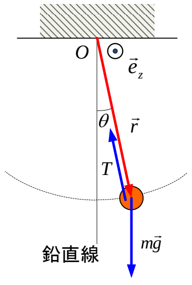
重力下の振り子:トルク方程式

$\vec{N} = \vec{r}\times(m\vec{g}) = -lmg\sin\theta\,\vec{e}_z$

$\vec{L} = \vec{r}\times(m\vec{v}) = l\left(ml\dfrac{d\theta}{dt}\right)\vec{e}_z = ml^2\dfrac{d\theta}{dt}\vec{e}_z$

よってトルク方程式より

$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N} \Rightarrow l\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta$



重力下の振り子:θが微小のときの解

$l\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = -g\sin\theta \approx -g\theta$

これは単振動の方程式と同じ形式。

$\omega^2 \equiv \dfrac{g}{l} \Leftrightarrow \omega \equiv \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ と置けば、

$\theta(t) = \theta_0\sin(\omega t + \phi_0)$ は運動方程式の解。

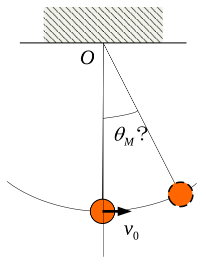
このとき周期 $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

初速と最大振れ角の関係

張力Tは仕事をしないので、エネルギー保存則から

$$\frac{1}{2}m{v_0}^2 = mgh$$
$$= mgl(1-\cos\theta_M)$$

$$\cos\theta_M = 1 - \frac{{v_0}^2}{2gl}$$



参考:振り子のエネルギー保存

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

$$\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right) = \frac{g}{l}\frac{d}{dt}(\cos\theta + C)$$

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l}\cos\theta + C_2$$

$$v^2 = 2gl\cos\theta + C_2$$

$\theta = 0$ において $v = v_0$ より、

$C_2 = {v_0}^2 - 2gl$

よって

$v^2 + 2gl(1-\cos\theta) = {v_0}^2$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}mv^2 + mgl(1-\cos\theta) = \dfrac{1}{2}m{v_0}^2$