物理学 I（力学）11 回目：質点系の運動

中野武雄

2012年6月19日

9回目課題の解答(1)

Q: 野球の硬球（質量145 [g]）を速度135 [km/h] で投げこむピッチングマシンがある。このマシンが硬球に与える力積を [N s] 単位で求めよ。この力積が 2.0 [s] の間に等しい力で与えられたものとすると、加えられた力は何 [N] か。

A: $I = \Delta p = mv = 145[\mathrm{g}] \times 130[\mathrm{km/h}]$

$$= 145[\mathrm{g}] \times \frac{1[\mathrm{kg}]}{1000[\mathrm{g}]} \times 130[\mathrm{km/h}] \times \frac{1000[\mathrm{m}]}{1[\mathrm{km}]} \times \frac{1[\mathrm{h}]}{3600[\mathrm{s}]}$$

$$= 5.437[\mathrm{kg\,m/s}] \sim 5.44[\mathrm{N\,s}]$$

$N = \mathrm{kg\,m/s^2}$

F が一定なら力積 $I = \int_0^T F dt = FT$ なので、

$$F = \frac{I}{T} = \frac{5.437[\mathrm{N\,s}]}{2.0[\mathrm{s}]} = 2.7[\mathrm{N}] \quad (I = |\vec{I}|, \text{他同様})$$

9回目課題の解答(2-1)

$\vec{r}_G = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$

Q: 月の質量は、地球の質量の1.23%である。地球ー月間の距離が 3.8×10⁵ kmのとき、地球・月の2天体からなる質点系の重心の位置を求めよ。それは地球の半径（6.4×10³ km）の何%か。

A: 地球の質量をm_E、月の質量をm_M、両者の距離をd_{EM}とする。座標原点を地球の中心に置けば、重心までの距離 d_G は

$$d_G = \frac{m_E \times 0 + m_M \times d_{EM}}{m_E + m_M} = \frac{m_M d_{EM}}{m_E + m_M}$$

月と地球の質量比 $\mu (= m_M / m_E) = 0.0123$を代入して

$$d_G = \frac{\mu d_{EM}}{1+\mu} = \frac{0.0123}{1.0123} \times 3.8 \times 10^5 [\mathrm{km}] = 4.62 \times 10^3 [\mathrm{km}]$$

9回目課題の解答(2-2)

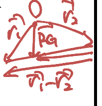
地球の半径との比率は

$$\frac{4.62 \times 10^3 [\mathrm{km}]}{6.4 \times 10^3 [\mathrm{km}]} = 0.721〜72\%$$

月と重心の距離は$3.7538 \times 10^5 [\mathrm{km}]$、比率は5865%...となる。間違いではないが、この形式だと意味のある有効桁数がわかりにくいのが難。

9回目課題の解答(3-1)

Q: 質量・位置ベクトルがそれぞれ $m_1, \vec{r}_1$ と $m_2, \vec{r}_2$ である2物体の重心の位置ベクトルは $\vec{R}_G = (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)/(m_1 + m_2)$ である。これがa) 2物体を結ぶ直線上にあること b)それぞれの質量に反比例して内分した位置にあること、を示せ。

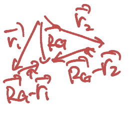


A. $\vec{R}_G - \vec{r}_2 = \dfrac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} - \vec{r}_2 = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

よって$\vec{r}_1 - \vec{r}_2$と $\vec{R}_G - \vec{r}_2$はスカラー倍の関係なので、物体1,2と重心は一直線上にある。

9回目課題の解答(3-2)

同様に計算して



$$\vec{R}_G - \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\vec{R}_G - \vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

よって

$$|\vec{R}_G - \vec{r}_1| : |\vec{R}_G - \vec{r}_2| = m_2 : m_1 = \frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2}$$

より、重心は物体1と2を結ぶ直線を、それぞれの質量の逆比に内分する点にある。

9回目課題の解答(4)

Q: He 原子（原子量4.0）が静止しているAr原子（同40）と1次元の完全弾性衝突をした。衝突前にHe原子が持っていた運動エネルギーの何%がAr原子に移行したか求めよ。

$m_{\mathrm{He}}v_{\mathrm{He}} = m_{\mathrm{He}}v'_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{Ar}}v'_{\mathrm{Ar}}$ および $1 = \left(-v'_{\mathrm{He}} + v'_{\mathrm{Ar}}\right)/v_{\mathrm{He}}$

より $v'_{\mathrm{Ar}} = \dfrac{2m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{He}}+m_{\mathrm{Ar}}}v_{\mathrm{He}}$ よって運動エネルギーの比は

$$\frac{K'_{\mathrm{Ar}}}{K_{\mathrm{He}}} = \frac{1}{2}m_{\mathrm{Ar}}{v'_{\mathrm{Ar}}}^2 \Big/ \frac{1}{2}m_{\mathrm{He}}{v_{\mathrm{He}}}^2 = \frac{m_{\mathrm{Ar}}}{m_{\mathrm{He}}}\left(\frac{2m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{He}}+m_{\mathrm{Ar}}}\right)^2$$

$$= \frac{4m_{\mathrm{He}}m_{\mathrm{He}}}{\left(m_{\mathrm{He}}+m_{\mathrm{Ar}}\right)^2} = \frac{4\times4.0\times40}{44^2} = 0.3305 \sim 33\%$$

9回目課題の解答(5-1)

Q: $v_1 \neq 0,\ v_2 \neq 0,\ e = 1$ の衝突について、衝突後のv_1', v_2' を求めよ。またこのとき全運動エネルギーが保存することを示せ。。

$V_G = \dfrac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$, $v_R = v_1 - v_2$ を用いると

$$v_1 = V_G + \frac{m_2}{m_1+m_2}v_R,\quad v_2 = V_G - \frac{m_1}{m_1+m_2}v_R$$

衝突後は$V'_G = V_G$, $v'_R = -v_R$ だから、

$$v'_1 = \frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2} + \frac{m_2}{m_1+m_2}(-v_1+v_2) = \frac{(m_1-m_2)v_1+2m_2v_2}{m_1+m_2}$$

9回目課題の解答(5-2)

$$v'_2 = \frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2} - \frac{m_1}{m_1+m_2}(-v_1+v_2) = \frac{2m_1v_1-(m_1-m_2)v_2}{m_1+m_2}$$

これらを用いると、衝突後の全運動エネルギーK'は

$$K' = \frac{1}{2}m_1{v'_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v'_2}^2$$

$$= \frac{1}{2}m_1\frac{\left\{(m_1-m_2)^2{v_1}^2 + 4m_2(m_1-m_2)v_1v_2 + 4{m_2}^2{v_2}^2\right\}}{(m_1+m_2)^2}$$

$$+ \frac{1}{2}m_2\frac{\left\{4{m_1}^2{v_1}^2 - 4m_1(m_1-m_2)v_1v_2 + (m_1-m_2)^2{v_2}^2\right\}}{(m_1+m_2)^2}$$

$$= \frac{1}{2(m_1+m_2)^2}\left\{m_1(m_1+m_2)^2{v_1}^2 + m_2(m_1+m_2)^2{v_2}^2\right\} = K$$

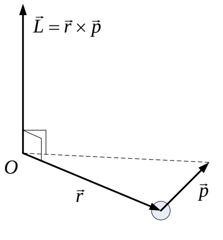
今日の内容

- 保存量の復習
- 質点系の運動
  - 全運動量・全角運動量の時間変化
- 力の合成・分解
  - 力の「作用線」
  - 偶力
- 重心を用いた質点系の運動の記述
  - 重心と角運動量
  - 重心と運動エネルギー

3つの保存量

- エネルギー～運動方程式の線積分
  - 受ける「仕事」が 0 なら変化しない
  - 保存力による仕事→全エネルギーの保存
- 運動量～運動方程式の時間積分
  - 質点系が受ける外力が 0 なら変化しない
- 角運動量～運動方程式と位置ベクトルの外積
  - 質点系が受ける、外力による「力のモーメント」が0なら変化しない

角運動量と運動方程式



$\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ の両辺と$\vec{r}$の外積より

$$\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)$$

$$= \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$= \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r}\times\vec{F}$$

力のモーメント（トルク）

角運動量の時間変化を与える式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

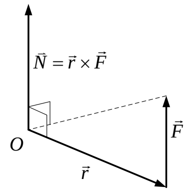
の右辺をトルクと定義する

$$\vec{N} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$$

すると

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

- トルク方程式



質点系の運動

全運動量と全角運動量

全運動量：

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_N\vec{v}_N$$

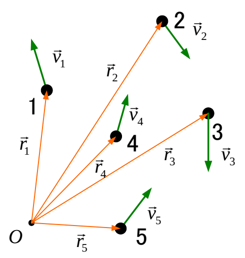
$$= \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i \left(= \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \right)$$

全角運動量：

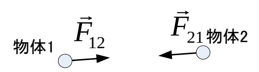
$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_1 + \cdots + \vec{r}_N \times m_N\vec{v}_N$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i \left(= \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i \right)$$

Oのとり方
原点に依存



復習：内力では全運動量は不変



第三法則より $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$、よって

$$\vec{p}_1(t_2) - \vec{p}_1(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{12}\,dt$$

$$\vec{p}_2(t_2) - \vec{p}_2(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{21}\,dt$$

より、 $\vec{p}_1(t_2) - \vec{p}_1(t_1) = -\{\vec{p}_2(t_2) - \vec{p}_2(t_1)\}$

$\Rightarrow \quad \vec{p}_1(t_2) + \vec{p}_2(t_2) = \vec{p}_1(t_1) + \vec{p}_2(t_1)$

質点系の全運動量

各質点について

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \left(m\frac{d\vec{v}_i}{dt} \right) = (\text{内力の和}) + \vec{K}_i$$

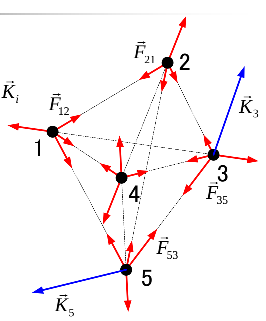
全運動量

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \cdots + \vec{p}_N$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \cdots + \frac{d\vec{p}_N}{dt}$$

$$= \vec{K}_1 + \cdots + \vec{K}_N$$

外力：外部から質点に働く力
→キャンセルできないので、
全運動量が変化



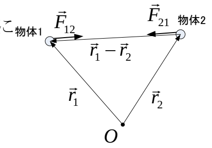
復習：内力では全角運動量は不変

第三法則より $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$、また
これらの力は互いを向く方向に
あるから

$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) // \vec{F}_{12} \Rightarrow (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12} = 0$

$$\vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} - \vec{r}_2 \times \left(-\vec{F}_{21} \right) = 0$$

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \frac{d}{dt}\left(\vec{L}_1 + \vec{L}_2 \right) = 0$$



- 運動量の場合と同様に、質点系における全角運動量は、内力によっては変化しない

質点系の全角運動量

個々の質点について

$$L_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\frac{dL_i}{dt} = \vec{N}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

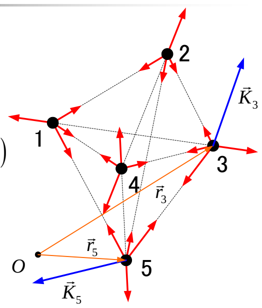
$$= \vec{r}_i \times \left(内力の和 + \vec{K}_i \right)$$

全角運動量

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \cdots + \vec{L}_N$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{L}_1}{dt} + \cdots + \frac{d\vec{L}_N}{dt}$$

$$= \vec{r}_1 \times \vec{K}_1 + \cdots + \vec{r}_N \times \vec{K}_N$$



ここまでのまとめ

全運動量

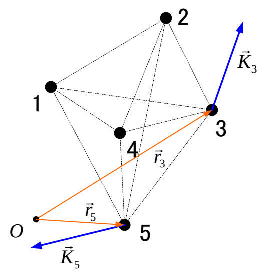
$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \cdots + \vec{p}_N$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{K}_1 + \cdots + \vec{K}_N$$

全角運動量

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \cdots + \vec{L}_N$$

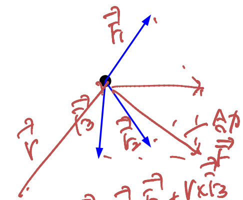
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{K}_1 + \cdots + \vec{r}_N \times \vec{K}_N$$



力の合成

これまでの「力の合成」

- 対象が質点だったので、常に一点で交わった。
- 力を「ベクトル」として加えればOK →「平行四辺形」



$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{F}_3$$

$$= \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3)$$

質点系での力の合成

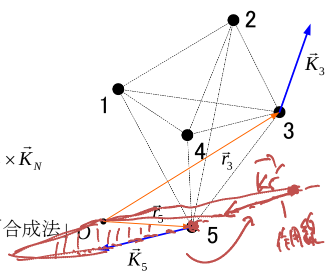
全運動量

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{K}_1 + \cdots + \vec{K}_N$$

全角運動量

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{K}_1 + \cdots + \vec{r}_N \times \vec{K}_N$$

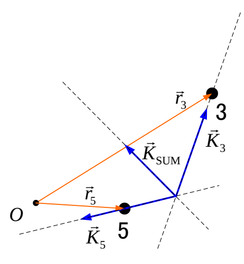
この2つの右辺を保った「合成法」はどんなものか？



力の「作用線」と合成

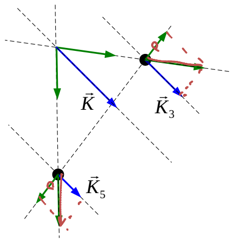
作用線：作用点を通り、力の向きに平行な線

- 作用線に沿って作用点を移動しても、トルクは変化しない。
- もちろん力の大きさも変化しない。
- 作用線が交わったところで平行四辺形ルールの合成を行えば良い →新しい作用線



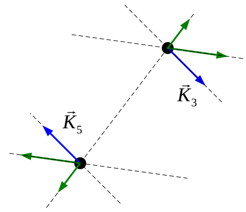
作用線が平行な場合

- 仮想的に、向きが反対で大きさが等しく、同じ作用線上にある2つの力を考える
  仮想的な力
- 合成して、新しい作用線の上で平行移動
- 作用線の交点で合成すればよい。



合成できない2力→偶力

- 大きさが等しく向きが正反対で、同じ作用線上にない2つの力
- さきほどの仮想的な力を加えても、やはり平行線のまま
- どの原点から見ても、トルクの和が等しくなる



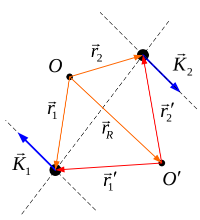
偶力とトルク

Oから見た全トルク

$$\vec{N} = \vec{r}_1 \times \vec{K}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{K}_2$$
$$= \vec{r}_1 \times \vec{K}_1 + \vec{r}_2 \times \left(-\vec{K}_1\right)$$
$$= \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \times \vec{K}_1$$

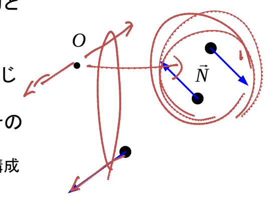
O'から見た全トルク

$$\vec{N}' = \left(\vec{r}_1' - \vec{r}_2'\right) \times \vec{K}_1 = \vec{N}$$



任意の原点の下での力の合成

- 原点を通る作用線を持つ力と偶力とに合成できる。
- 偶力はどの点から見ても同じトルクを発生
- 偶力以外の力は、原点にその力を正負で起けば:
  - 負の力はもとの力と偶力を構成
    →原点回りのトルク
  - 正の力は原点に作用する力
    →並進運動の加速度となる



重心を用いた質点系の運動の記述

復習:重心と全運動量

$$M \equiv m_1 + m_2 + \cdots + m_5 = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

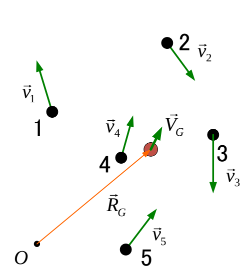
重心ベクトル

$$\vec{R}_G \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \vec{r}_i$$

$$\Rightarrow \vec{V}_G \equiv \frac{d\vec{R}_G}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \vec{v}_i$$

これを用いると全運動量は

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = M\vec{V}_G$$



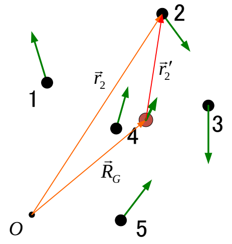
重心からの相対座標 ← 原点の位置による $\vec{L}$ への影響を分離する!

$\vec{r}_i = \vec{R}_G + \vec{r}_i{}'$ のように$\vec{r}_i{}'$を定義。

$$
\begin{aligned}
& m_1\vec{r}_1{}' + \cdots + m_N\vec{r}_N{}' \\
&\quad = m_1(\vec{r}_1 - \vec{R}_G) + \cdots + m_N(\vec{r}_N - \vec{R}_G) \\
&\quad = m_1\vec{r}_1 + \cdots + m_N\vec{r}_N - M\vec{R}_G \\
&\quad = 0
\end{aligned}
$$

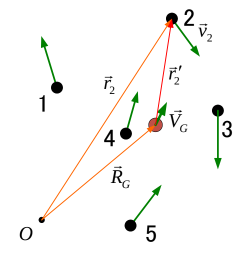
同様に

$m_1\vec{v}_1{}' + \cdots + m_N\vec{v}_N{}' = 0$



重心と全角運動量

$$
\begin{aligned}
\vec{L} &= \vec{L}_1 + \cdots + \vec{L}_N \\
&= \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i{}' + \vec{R}_G) \times m_i \frac{d(\vec{r}_i{}' + \vec{R}_G)}{dt}
\end{aligned}
$$



重心と全角運動量(続)

$$
\begin{aligned}
\vec{L} &= \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i{}' + \vec{R}_G) \times m_i \frac{d(\vec{r}_i{}' + \vec{R}_G)}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i{}' \times m_i \frac{d\vec{r}_i{}'}{dt} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i{}' \times m_i \frac{d\vec{R}_G}{dt} + \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_G \times m_i \frac{d\vec{r}_i{}'}{dt} + \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_G \times m_i \frac{d\vec{R}_G}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i{}' \times m_i \frac{d\vec{r}_i{}'}{dt} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i{}'\right)}_{=0} \times \frac{d\vec{R}_G}{dt} + \vec{R}_G \times \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i{}'}{dt}\right)}_{0} + \vec{R}_G \times \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)}_{M} \frac{d\vec{R}_G}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i{}' \times m_i \frac{d\vec{r}_i{}'}{dt} + \vec{R}_G \times M \frac{d\vec{R}_G}{dt} = \vec{L}' + \vec{L}_G
\end{aligned}
$$

ただし $\vec{L}' \equiv \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i{}' \times m_i \frac{d\vec{r}_i{}'}{dt}$、 および $\vec{L}_G \equiv \vec{R}_G \times M \dfrac{d\vec{R}_G}{dt}$

L', L_G って?

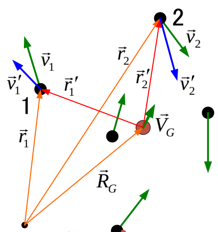
$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_G$

Oのとり方によらない

$$
\begin{aligned}
\vec{L}' &\equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i{}' \times m_i \frac{d\vec{r}_i{}'}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i{}' \times m_i \vec{v}_i{}' = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i{}' \times m_i (\vec{v}_i - \vec{V}_G)
\end{aligned}
$$

$$\vec{L}_G \equiv \vec{R}_G \times M \frac{d\vec{R}_G}{dt} = \vec{R}_G \times \vec{P}_G$$

← (Oからみた)重心の角運動量



「重心回りの角運動量」

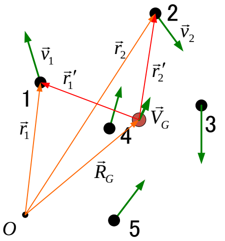
$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_G \Rightarrow \vec{L}' = \vec{L} - \vec{L}_G$ より $\dfrac{d\vec{L}'}{dt} = \dfrac{d\vec{L}}{dt} - \dfrac{d\vec{L}_G}{dt}$

ここで

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{K}_i$$

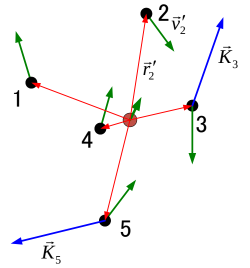
$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}_G}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\vec{R}_G \times M \frac{d\vec{R}_G}{dt}\right) \\
&= \underbrace{\cancel{\frac{d\vec{R}_G}{dt} \times M \frac{d\vec{R}_G}{dt}}}_{0} + \vec{R}_G \times M \frac{d^2\vec{R}_G}{dt^2} \\
&= \vec{R}_G \times M \frac{d^2\vec{R}_G}{dt^2} = \vec{R}_G \times \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i
\end{aligned}
$$

$\frac{dL_G}{dt}$



「重心回りの角運動量」(続)

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{L}'}{dt} &= \frac{d\vec{L}}{dt} - \frac{d\vec{L}_G}{dt} \\
&= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{K}_i - \vec{R}_G \times \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{R}_G) \times \vec{K}_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i{}' \times \vec{K}_i
\end{aligned}
$$



結局…

$\frac{d\vec{P}_G}{dt} = \sum_i \vec{K}_i$

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{K}_i$

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{K}_i$$

- 「質点系の、重心に関する全角運動量の時間変化は、重心に関する外力のトルクの総和に等しい」
（「重心に関する」=「重心を原点とした」）
- 重心の運動状態によらない（重心が加速度運動していても成立する）。

質点系の運動エネルギー

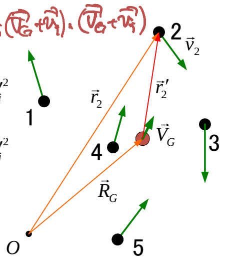
$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left| \vec{V}_G + \vec{v}_i' \right|^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\vec{V}_G + \vec{v}_i') \cdot (\vec{V}_G + \vec{v}_i')$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i V_G^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i 2\vec{V}_G \cdot \vec{v}_i' + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \right) V_G^2 + \vec{V}_G \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i'}_{=0} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

$$= \frac{1}{2} M V_G^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2 = \frac{1}{2} M V_G^2 + K'$$

ただし $K' \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$



(3)　$\vec{N} = \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{g})$

「重心回りの…」のまとめ

$\sum_i \vec{r}_i' \times (m_i \vec{g}) = 0$

$\vec{P} = \vec{P}_G$,　　$\vec{P}' = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i' = 0$

- 「重心回りの全運動量」は0

$\frac{d\vec{P}_G}{dt} = \sum_i \vec{K}_i$

$\vec{L} = \vec{R}_G \times \vec{P}_G + \vec{L}'$,　　$\vec{L}' = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$

原点依存　原点非依存

- 「重心回りの全角運動量」は全角運動量から「重心の角運動量」を引いたもの

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{K}_i$$

- 重心周りの全角運動量の時間変化は「重心周りの全トルク」

$K = \frac{1}{2} M V_G^2 + K'$,　　$K' = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$

- 「重心回りの運動エネルギー」は、全運動エネルギーから「重心の運動エネルギー」を引いたもの