物理学Ｉ（力学）11 回目：質点系の運動

中野武雄

2012年6月19日

9回目課題の解答(1)

Q: 野球の硬球（質量145 [g]）を速度135 [km/h] で投げこむピッチングマシンがある。このマシンが硬球に与える力積を [N s] 単位で求めよ。この力積が 2.0 [s] の間に等しい力で与えられたものとすると、加えられた力は何 [N] か。

kg m/s

A: $I = \Delta p = mv = 145[\mathrm{g}]\times 135[\mathrm{km/h}]$

$$= 145[\mathrm{g}]\times\frac{1[\mathrm{kg}]}{1000[\mathrm{g}]}\times 135[\mathrm{km/h}]\times\frac{1000[\mathrm{m}]}{1[\mathrm{km}]}\times\frac{1[\mathrm{h}]}{3600[\mathrm{s}]}$$

$$= 5.437[\mathrm{kg\,m/s}] \sim 5.44[\mathrm{N\,s}]$$

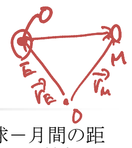
N ⇔ kg m/s²

F が一定なら力積 $I = \int_0^T F dt = FT$ なので、

$$F = \frac{I}{T} = \frac{5.437[\mathrm{N\,s}]}{2.0[\mathrm{s}]} = 2.7[\mathrm{N}] \quad (I = |\vec{I}|, \text{他同様})$$

9回目課題の解答(2-1)

$\vec{r}_G = \frac{m_E\vec{r}_E + m_M\vec{r}_M}{m_E + m_M}$



Q: 月の質量は、地球の質量の1.23%である。地球ー月間の距離が 3.8×10⁵ kmのとき、地球・月の2天体からなる質点系の重心の位置を求めよ。それは地球の半径（6.4×10³ km）の何%か。

A: 地球の質量をm_E、月の質量をm_M、両者の距離をd_{EM}とする。座標原点を地球の中心に置けば、重心までの距離d_Gは

$$d_G = \frac{m_E\times 0 + m_M\times d_{EM}}{m_E + m_M} = \frac{m_M d_{EM}}{m_E + m_M}$$

月と地球の質量比$\mu (= m_M/m_E) = 0.0123$を代入して

$$d_G = \frac{\mu d_{EM}}{1+\mu} = \frac{0.0123}{1.0123}\times 3.8\times 10^5[\mathrm{km}] = 4.62\times 10^3[\mathrm{km}]$$

9回目課題の解答(2-2)

地球の半径との比率は

$$\frac{4.62\times 10^3[\mathrm{km}]}{6.4\times 10^3[\mathrm{km}]} = 0.721〜72\%$$

月と重心の距離は$3.7538\times 10^5[\mathrm{km}]$、比率は5865%...となる。間違いではないが、この形式だと意味のある有効桁数がわかりにくいのが難。

9回目課題の解答(3-1)

Q: 質量・位置ベクトルがそれぞれ $m_1, \vec{r}_1$ と $m_2, \vec{r}_2$ である2物体の重心の位置ベクトルは $\vec{R}_G = (m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2)/(m_1+m_2)$ である。これが a) 2物体を結ぶ直線上にあること b)それぞれの質量に反比例して内分した位置にあること、を示せ。

A. $\vec{R}_G - \vec{r}_2 = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2} - \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

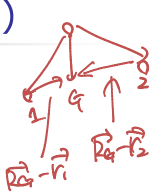
よって$\vec{r}_1 - \vec{r}_2$と$\vec{R}_G - \vec{r}_2$はスカラー倍の関係なので、物体1,2と重心は一直線上にある。

9回目課題の解答(3-2)

同様に計算して

$$\vec{R}_G - \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1+m_2}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

$$\vec{R}_G - \vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$



よって

$$|\vec{R}_G - \vec{r}_1| : |\vec{R}_G - \vec{r}_2| = m_2 : m_1 = \frac{1}{m_1} : \frac{1}{m_2}$$

より、重心は物体1と2を結ぶ直線を、それぞれの質量の逆比に内分する点にある。

9回目課題の解答(4)

Q: He 原子（原子量4.0）が静止しているAr原子（同40）と1次元の完全弾性衝突をした。衝突前にHe原子が持っていた運動エネルギーの何%がAr原子に移行したか求めよ。

$m_{\mathrm{He}} v_{\mathrm{He}} = m_{\mathrm{He}} v'_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{Ar}} v'_{\mathrm{Ar}}$ および $1 = \left(-v'_{\mathrm{He}} + v'_{\mathrm{Ar}}\right)/v_{\mathrm{He}}$

より $v'_{\mathrm{Ar}} = \dfrac{2m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{Ar}}} v_{\mathrm{He}}$ よって運動エネルギーの比は

$$\frac{K'_{\mathrm{Ar}}}{K_{\mathrm{He}}} = \frac{1}{2} m_{\mathrm{Ar}} {v'_{\mathrm{Ar}}}^2 \Big/ \frac{1}{2} m_{\mathrm{He}} {v_{\mathrm{He}}}^2 = \frac{m_{\mathrm{Ar}}}{m_{\mathrm{He}}} \left(\frac{2m_{\mathrm{He}}}{m_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{Ar}}} \right)^2$$

$$= \frac{4 m_{\mathrm{He}} m_{\cancel{\mathrm{He}}\,\mathrm{Ar}}}{(m_{\mathrm{He}} + m_{\mathrm{Ar}})^2} = \frac{4 \times 4.0 \times 40}{44^2} = 0.3305 \sim 33\%$$

9回目課題の解答(5-1)

Q: $v_1 \neq 0,\ v_2 \neq 0,\ e = 1$ の衝突について、衝突後のv_1', v_2' を求めよ。またこのとき全運動エネルギーが保存することを示せ。。

$V_G = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2},\ v_R = v_1 - v_2$ を用いると

$v_1 = V_G + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2} v_R,\ v_2 = V_G - \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} v_R$ ← 衝突後… 'を入れればよい

$v_1' = V_G' + \dfrac{m_2}{m_1+m_2} v_R'$

衝突後は $V'_G = V_G,\ v'_R = -v_R$ だから、

$$v'_1 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(-v_1 + v_2) = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

9回目課題の解答(5-2)

$$v'_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} - \frac{m_1}{m_1 + m_2}(-v_1 + v_2) = \frac{2m_1 v_1 - (m_1 - m_2)v_2}{m_1 + m_2}$$

これらを用いると、衝突後の全運動エネルギーK'は

$$K' = \frac{1}{2} m_1 {v'_1}^2 + \frac{1}{2} m_2 {v'_2}^2$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \frac{\left\{(m_1 - m_2)^2 v_1^2 + 4m_2(m_1 - m_2)v_1 v_2 + 4m_2^2 v_2^2\right\}}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$+ \frac{1}{2} m_2 \frac{\left\{4m_1^2 v_1^2 - 4m_1(m_1 - m_2)v_1 v_2 + (m_1 - m_2)^2 v_2^2\right\}}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$= \frac{1}{2(m_1 + m_2)^2} \left\{ m_1 (m_1 + m_2)^2 v_1^2 + m_2 (m_1 + m_2)^2 v_2^2 \right\} = K$$

今日の内容

- 保存量の復習
- 質点系の運動
  - 全運動量・全角運動量の時間変化
- 力の合成・分解
  - 力の「作用線」
  - 偶力
- 重心を用いた質点系の運動の記述
  - 重心と角運動量
  - 重心と運動エネルギー

3つの保存量

- エネルギー～運動方程式の線積分
  - 受ける「仕事」が 0 なら変化しない
  - 保存力による仕事→全エネルギーの保存
- 運動量～運動方程式の時間積分
  - 質点系が受ける外力が 0 なら変化しない
- 角運動量～運動方程式と位置ベクトルの外積
  - 質点系が受ける、外力による「力のモーメント」が0なら変化しない

運動方程式→エネルギー方程式

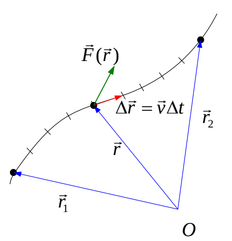
運動方程式

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

の両辺を線積分

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = W(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$$



- 「運動エネルギーの増加は、その間に質点に働いた力のなす仕事に等しい」

力学的エネルギーの保存則

- 保存力のみが作用している場合は、

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2-\frac{1}{2}mv_1{}^2=W_{\vec{r}_1\to\vec{r}_2}=-U(\vec{r}_2)+U(\vec{r}_1)$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}mv_2{}^2+U(\vec{r}_2)=\frac{1}{2}mv_1{}^2+U(\vec{r}_1)$$

運動エネルギー+位置エネルギーが
「保存」される

運動量

定義： $\vec{p}\equiv m\vec{v}$

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\vec{v})=m\frac{d\vec{v}}{dt}=m\vec{a}$$

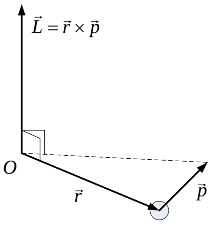
より、運動方程式は

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$$

この両辺を時間で積分すると

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{d\vec{p}}{dt}dt=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt\Rightarrow\Delta\vec{p}=\vec{I}$$

角運動量と運動方程式



$\dfrac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$ の両辺と$\vec{r}$の外積より

$$\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\Rightarrow\ \frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\vec{p})$$
$$=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p}+\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}$$
$$=\vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}$$

力のモーメント(トルク)

角運動量の時間変化を与える式

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}$$

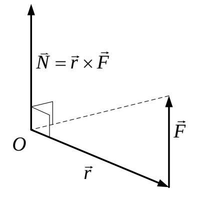
の右辺をトルクと定義する

$$\vec{N}\equiv\vec{r}\times\vec{F}$$

すると

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N}$$

- トルク方程式



質点系の運動

全運動量と全角運動量

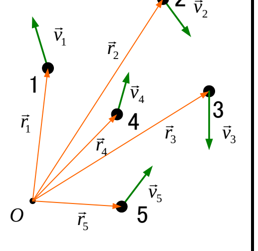
全運動量：

$$\vec{P}=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+\cdots+m_N\vec{v}_N$$
$$=\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_i\left(=\sum_{i=1}^{N}\vec{p}_i\right)$$

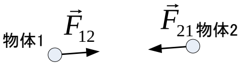
全角運動量：

$$\vec{L}=\vec{r}_1\times m_1\vec{v}_1+\cdots+\vec{r}_N\times m_N\vec{v}_N$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i\left(=\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i\right)$$

原点依存



復習：
内力では全運動量は不変



第三法則より$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$、よって

$$\vec{p}_1(t_2)-\vec{p}_1(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{12}dt$$

$$\vec{p}_2(t_2)-\vec{p}_2(t_1)=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}_{21}dt$$

より、 $\vec{p}_1(t_2)-\vec{p}_1(t_1)=-\{\vec{p}_2(t_2)-\vec{p}_2(t_1)\}$

$\Rightarrow$ $\vec{p}_1(t_2)+\vec{p}_2(t_2)=\vec{p}_1(t_1)+\vec{p}_2(t_1)$

質点系の全運動量

各質点について

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt}=\left(m\frac{d\vec{v}_i}{dt}\right)=(\text{内力の和})+\vec{K}_i$$

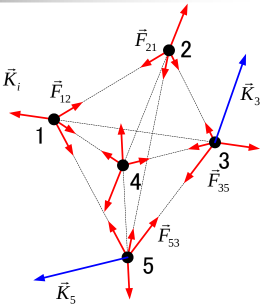
全運動量

$$\vec{P}=\vec{p}_1+\cdots+\vec{p}_N$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\frac{d\vec{p}_1}{dt}+\cdots+\frac{d\vec{p}_N}{dt}$$

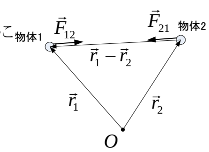
$$=\vec{K}_1+\cdots+\vec{K}_N$$

外力：外部から質点に働く力
→キャンセルできないので、
全運動量が変化



復習：
内力では全角運動量は不変

第三法則より$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$、また
これらの力は互いを向く方向に
あるから



$$(\vec{r}_1-\vec{r}_2)//\vec{F}_{12}\Rightarrow(\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times\vec{F}_{12}=0$$

$$\vec{r}_1\times\vec{F}_{12}-\vec{r}_2\times\left(-\vec{F}_{21}\right)=0$$

$$\vec{N}_1+\vec{N}_2=\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_1+\vec{L}_2\right)=0$$

- 運動量の場合と同様に、質点系における全角運動量は、内力によっては変化しない

質点系の全角運動量

個々の質点について

$$L_i=\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i$$

$$\frac{dL_i}{dt}=\vec{N}_i=\vec{r}_i\times\vec{F}_i$$

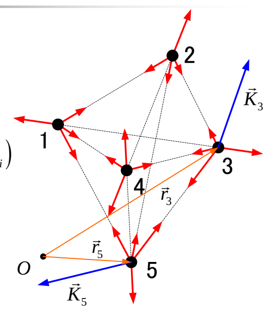
$$=\vec{r}_i\times\left(\text{内力の和}+\vec{K}_i\right)$$

全角運動量

$$\vec{L}=\vec{L}_1+\cdots+\vec{L}_N$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d\vec{L}_1}{dt}+\cdots+\frac{d\vec{L}_N}{dt}$$

$$=\vec{r}_1\times\vec{K}_1+\cdots+\vec{r}_N\times\vec{K}_N$$



ここまでのまとめ

全運動量

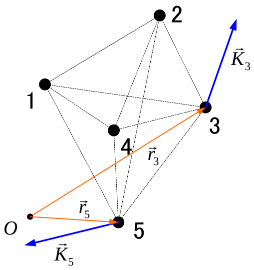
$$\vec{P}=\vec{p}_1+\cdots+\vec{p}_N$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{K}_1+\cdots+\vec{K}_N$$

全角運動量

$$\vec{L}=\vec{L}_1+\cdots+\vec{L}_N$$

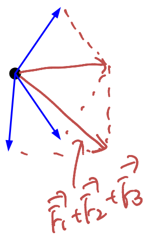
$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}_1\times\vec{K}_1+\cdots+\vec{r}_N\times\vec{K}_N$$



力の合成

これまでの「力の合成」

- 対象が質点だったので、常に一点で交わった。
- 力を「ベクトル」として加えればOK
→「平行四辺形」



質点系での力の合成

$\vec{r}_3\times\vec{K}_3 = \vec{r}_3'\times\vec{K}_3'$

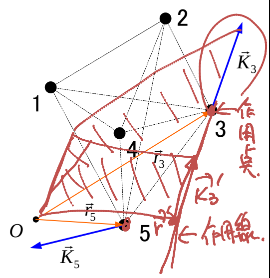
全運動量

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{K}_1+\cdots+\vec{K}_N$$

全角運動量

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}_1\times\vec{K}_1+\cdots+\vec{r}_N\times\vec{K}_N$$

この2つの右辺を保った「合成法」はどんなものか？



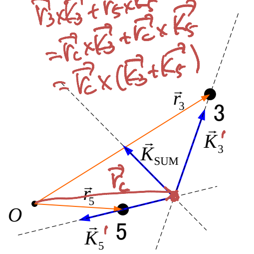
力の「作用線」と合成

$\vec{r}_3\times\vec{K}_3=\vec{r}_c\times\vec{K}_3$
$\vec{r}_5\times\vec{K}_5=\vec{r}_c\times\vec{K}_5$

$\vec{r}_3\times\vec{K}_3+\vec{r}_5\times\vec{K}_5$
$=\vec{r}_c\times\vec{K}_3+\vec{r}_c\times\vec{K}_5$
$=\vec{r}_c\times(\vec{K}_3+\vec{K}_5)$

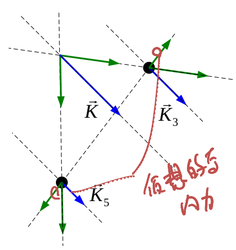
作用線：作用点を通り、力の向きに平行な線

- 作用線に沿って作用点を移動しても、トルクは変化しない。
- もちろん力の大きさも変化しない。
- 作用線が交わったところで平行四辺形ルールの合成を行えば良い
→新しい作用線



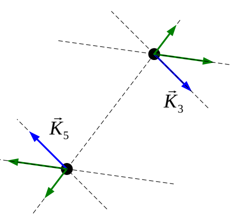
作用線が平行な場合

- 仮想的に、向きが反対で大きさが等しく、同じ作用線上にある2つの力を考える
- 合成して、新しい作用線の上で平行移動
- 作用線の交点で合成すればよい。



合成できない2力→偶力

- 大きさが等しく向きが正反対で、同じ作用線上にない2つの力
- さきほどの仮想的な力を加えても、やはり平行線のまま
- どの原点から見ても、トルクの和が等しくなる



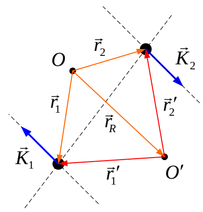
偶力とトルク

Oから見た全トルク

$$\vec{N}=\vec{r}_1\times\vec{K}_1+\vec{r}_2\times\vec{K}_2$$
$$=\vec{r}_1\times\vec{K}_1+\vec{r}_2\times\left(-\vec{K}_1\right)$$
$$=\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)\times\vec{K}_1$$

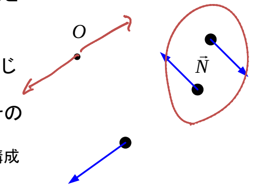
O'から見た全トルク

$$\vec{N}'=\left(\vec{r}_1'-\vec{r}_2'\right)\times\vec{K}_1=\vec{N}$$



任意の原点の下での力の合成

- 原点を通る作用線を持つ力と偶力とに合成できる。
- 偶力はどの点から見ても同じトルクを発生
- 偶力以外の力は、原点にその力を正負で起けば:
  - 負の力はもとの力と偶力を構成
→原点回りのトルク
  - 正の力は原点に作用する力
→並進運動の加速度となる



重心を用いた質点系の運動の記述

復習:重心と全運動量

$$M \equiv m_1 + m_2 + \cdots + m_5 = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

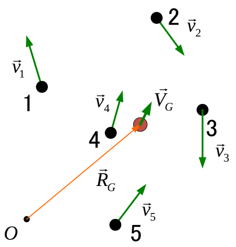
重心ベクトル

$$\vec{R}_G \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \vec{r}_i$$

$$\Rightarrow \vec{V}_G = \frac{d\vec{R}_G}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \vec{v}_i$$

これを用いると全運動量は

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = M\vec{V}_G$$



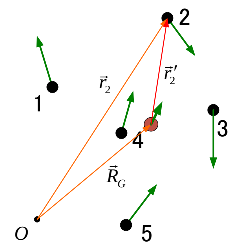
重心からの相対座標

$\vec{r}_i = \vec{R}_G + \vec{r}_i'$ のように$\vec{r}_i'$を定義。

$$\begin{aligned} & m_1\vec{r}_1' + \cdots + m_N\vec{r}_N' \\ &= m_1(\vec{r}_1 - \vec{R}_G) + \cdots + m_N(\vec{r}_N - \vec{R}_G) \\ &= m_1\vec{r}_1 + \cdots + m_N\vec{r}_N - M\vec{R}_G \\ &= 0 \end{aligned}$$

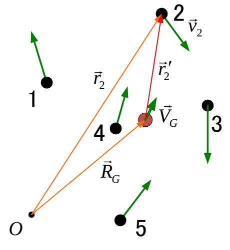
同様に

$$m_1\vec{v}_1' + \cdots + m_N\vec{v}_N' = 0$$



重心と全角運動量

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{L}_1 + \cdots + \vec{L}_N \\ &= \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i' + \vec{R}_G) \times m_i \frac{d(\vec{r}_i' + \vec{R}_G)}{dt} \end{aligned}$$



重心と全角運動量(続)

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i' + \vec{R}_G) \times m_i \frac{d(\vec{r}_i' + \vec{R}_G)}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \frac{d\vec{r}_i'}{dt} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \frac{d\vec{R}_G}{dt} + \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_G \times m_i \frac{d\vec{r}_i'}{dt} + \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_G \times m_i \frac{d\vec{R}_G}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \frac{d\vec{r}_i'}{dt} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i'\right)}_{0} \times \frac{d\vec{R}_G}{dt} + \vec{R}_G \times \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i'}{dt}\right)}_{0} + \vec{R}_G \times \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)}_{M} \frac{d\vec{R}_G}{dt} \\ &= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \frac{d\vec{r}_i'}{dt} + \vec{R}_G \times M \frac{d\vec{R}_G}{dt} = \vec{L}' + \vec{L}_G \end{aligned}$$

原点のとり方に依存しない

原点のとり方に依存する

ただし $\vec{L}' \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \frac{d\vec{r}_i'}{dt}$、および $\vec{L}_G \equiv \vec{R}_G \times M \frac{d\vec{R}_G}{dt}$

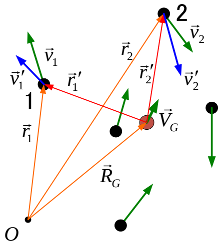
L', L_G って？

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_G$$

$$\vec{L}' \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \frac{d\vec{r}_i'}{dt}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i' = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i (\vec{v}_i - \vec{V}_G)$$

$$\vec{L}_G \equiv \vec{R}_G \times M \frac{d\vec{R}_G}{dt} = \vec{R}_G \times \vec{P}_G$$



「重心回りの角運動量」

$M\frac{d^2\vec{R}_G}{dt^2} = \frac{dP_G}{dt}$

$\frac{d\vec{R}_G}{dt} = \vec{V}_G$ $M\vec{V}_G = P_G$

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_G \Rightarrow \vec{L}' = \vec{L} - \vec{L}_G \text{ より } \frac{d\vec{L}'}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} - \frac{d\vec{L}_G}{dt}$$

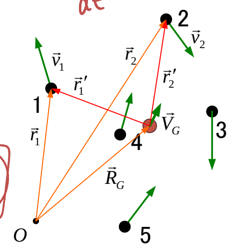
ここで

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{K}_i$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{R}_G \times M \frac{d\vec{R}_G}{dt}\right)$$

$$= \cancel{\frac{d\vec{R}_G}{dt} \times M \frac{d\vec{R}_G}{dt}}^{\,0} + \boxed{\vec{R}_G \times M \frac{d^2\vec{R}_G}{dt^2}}$$

$$= \vec{R}_G \times M \frac{d^2\vec{R}_G}{dt^2} = \vec{R}_G \times \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i$$



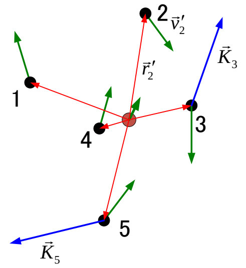
「重心回りの角運動量」(続)

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} - \frac{d\vec{L}_G}{dt}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{K}_i - \vec{R}_G \times \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{R}_G) \times \vec{K}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{K}_i$$



結局…

$\frac{d\vec{R}_G}{dt} = \sum_i K_i$

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{K}_i$$

- 「質点系の、重心に関する全角運動量の時間変化は、重心に関する外力のトルクの総和に等しい」
（「重心に関する」=「重心を原点とした」）
- 重心の運動状態によらない（重心が加速度運動していても成立する）。

質点系の運動エネルギー

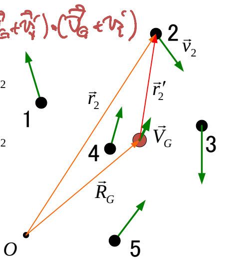
$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i \left|\vec{V}_G + \vec{v}_i'\right|^2 \quad \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{V}_G + \vec{v}_i') \cdot (\vec{V}_G + \vec{v}_i')$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i V_G^{\,2} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i 2\vec{V}_G \cdot \vec{v}_i' + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) V_G^{\,2} + \vec{V}_G \cdot \overbrace{\sum_{i=1}^{N} \cancel{m_i \vec{v}_i'}}^{=0} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

$$= \frac{1}{2} M V_G^{\,2} + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2 = \frac{1}{2} M V_G^{\,2} + K'$$

$$\text{ただし } K' \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

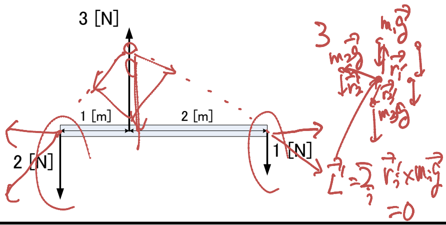


「重心回りの…」のまとめ

$\vec{P} = \vec{P}_G,$	$\vec{P}' = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i' = 0$	▪ 「重心回りの全運動量」は0
$\vec{L} = \vec{R}_G \times \vec{P}_G + \vec{L}',$	$\vec{L}' = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$	▪ 「重心回りの全角運動量」は全角運動量から「重心の角運動量」を引いたもの
	$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{K}_i$	▪ 重心周りの全角運動量の時間変化は「重心周りの全トルク」
$K = \frac{1}{2} M V_G^{\,2} + K',$	$K' = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$	▪ 「重心回りの運動エネルギー」は、全運動エネルギーから「重心の運動エネルギー」を引いたもの

課題2

棒に作用している以下の3力が、合力も合成トルクもいずれも0であることを作図で示せ。



$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = 0$