# 物理学 I（力学）11 回目：質点系の運動

中野武雄
2012年6月19日

## 今日の内容

- 保存量の復習
- 質点系の運動
  - 全運動量・全角運動量の時間変化
- 力の合成・分解
  - 力の「作用線」
  - 偶力
- 重心を用いた質点系の運動の記述
  - 重心と角運動量
  - 重心と運動エネルギー

# 質点系の運動

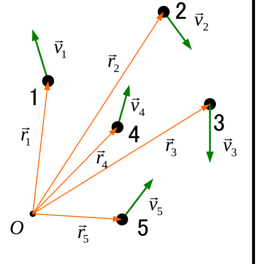
## 全運動量と全角運動量

全運動量：

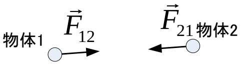
$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_N\vec{v}_N = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i \left( = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \right)$$

全角運動量：

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times m_1\vec{v}_1 + \cdots + \vec{r}_N \times m_N\vec{v}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i\vec{v}_i \left( = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i \right)$$




## 復習：内力では全運動量は不変




第三法則より $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$、よって

$$\vec{p}_1(t_2) - \vec{p}_1(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{12}\,dt$$

$$\vec{p}_2(t_2) - \vec{p}_2(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{21}\,dt$$

より、 $\vec{p}_1(t_2) - \vec{p}_1(t_1) = -\{\vec{p}_2(t_2) - \vec{p}_2(t_1)\}$

$\Rightarrow \quad \vec{p}_1(t_2) + \vec{p}_2(t_2) = \vec{p}_1(t_1) + \vec{p}_2(t_1)$

## 質点系の全運動量

各質点について

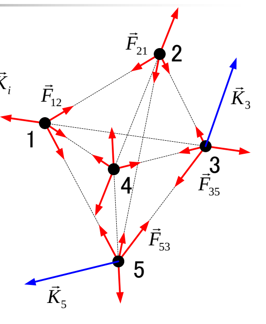
$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \left( m\frac{d\vec{v}_i}{dt} \right) = (\text{内力の和}) + \vec{K}_i$$

全運動量

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \cdots + \vec{p}_N$$

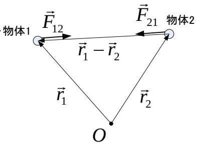
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \cdots + \frac{d\vec{p}_N}{dt} = \vec{K}_1 + \cdots + \vec{K}_N$$

外力：外部から質点に働く力
→キャンセルできないので、全運動量が変化



## 復習：内力では全角運動量は不変

第三法則より $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$ 、また
これらの力は互いを向く方向に
あるから




$$(\vec{r}_1-\vec{r}_2)//\vec{F}_{12} \Rightarrow (\vec{r}_1-\vec{r}_2)\times\vec{F}_{12}=0$$

$$\vec{r}_1\times\vec{F}_{12}-\vec{r}_2\times\left(-\vec{F}_{21}\right)=0$$

$$\vec{N}_1+\vec{N}_2=\frac{d}{dt}\left(\vec{L}_1+\vec{L}_2\right)=0$$

- 運動量の場合と同様に、質点系における全角運動量は、内力によっては変化しない

## 質点系の全角運動量

個々の質点について

$$L_i=\vec{r}_i\times m_i\vec{v}_i$$

$$\frac{dL_i}{dt}=\vec{N}_i=\vec{r}_i\times\vec{F}_i$$

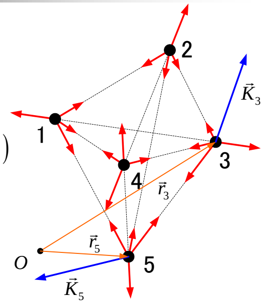
$$=\vec{r}_i\times\left(\text{内力の和}+\vec{K}_i\right)$$

全角運動量

$$\vec{L}=\vec{L}_1+\cdots+\vec{L}_N$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d\vec{L}_1}{dt}+\cdots+\frac{d\vec{L}_N}{dt}$$

$$=\vec{r}_1\times\vec{K}_1+\cdots+\vec{r}_N\times\vec{K}_N$$




## ここまでのまとめ

全運動量

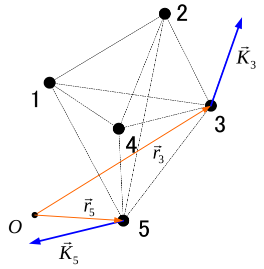
$$\vec{P}=\vec{p}_1+\cdots+\vec{p}_N$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{K}_1+\cdots+\vec{K}_N$$

全角運動量

$$\vec{L}=\vec{L}_1+\cdots+\vec{L}_N$$

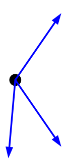
$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}_1\times\vec{K}_1+\cdots+\vec{r}_N\times\vec{K}_N$$




## 力の合成

## これまでの「力の合成」

- 対象が質点だったので、常に一点で交わった。
- 力を「ベクトル」として加えればOK
→「平行四辺形」



## 質点系での力の合成

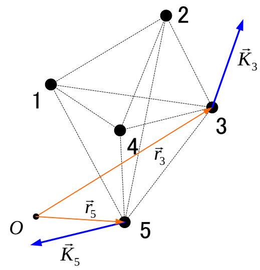
全運動量

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{K}_1+\cdots+\vec{K}_N$$

全角運動量

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}_1\times\vec{K}_1+\cdots+\vec{r}_N\times\vec{K}_N$$

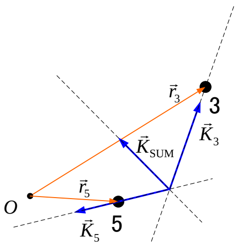
この2つの右辺を保った「合成法」はどんなものか？



## 力の「作用線」と合成

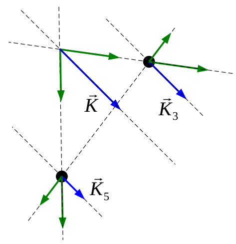
作用線：作用点を通り、力の向きに平行な線

- 作用線に沿って作用点を移動しても、トルクは変化しない。
- もちろん力の大きさも変化しない。
- 作用線が交わったところで平行四辺形ルールの合成を行えば良い→新しい作用線



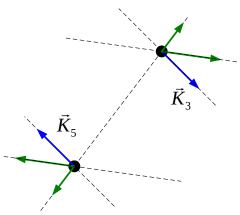

## 作用線が平行な場合

- 仮想的に、向きが反対で大きさが等しく、同じ作用線上にある2つの力を考える
- 合成して、新しい作用線の上で平行移動
- 作用線の交点で合成すればよい。




## 合成できない2力→偶力

- 大きさが等しく向きが正反対で、同じ作用線上にない2つの力
- さきほどの仮想的な力を加えても、やはり平行線のまま
- どの原点から見ても、トルクの和が等しくなる



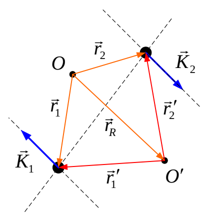

## 偶力とトルク

$O$から見た全トルク

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \vec{r}_1\times\vec{K}_1+\vec{r}_2\times\vec{K}_2\\ &= \vec{r}_1\times\vec{K}_1+\vec{r}_2\times\left(-\vec{K}_1\right)\\ &= \left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)\times\vec{K}_1\end{aligned}$$

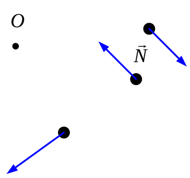
$O'$から見た全トルク

$$\vec{N}'=\left(\vec{r}_1'-\vec{r}_2'\right)\times\vec{K}_1=\vec{N}$$




## 任意の原点の下での力の合成

- 原点を通る作用線を持つ力と偶力とに合成できる。
- 偶力はどの点から見ても同じトルクを発生
- 偶力以外の力は、原点にその力を正負で起けば：
  - 負の力はもとの力と偶力を構成→原点回りのトルク
  - 正の力は原点に作用する力→並進運動の加速度となる




## 重心を用いた質点系の運動の記述

## 復習：重心と全運動量

$M \equiv m_1 + m_2 + \cdots + m_5 = \sum_{i=1}^{N} m_i$

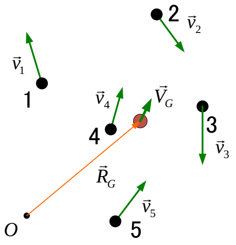
重心ベクトル

$\vec{R}_G \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \vec{r}_i$

$\Rightarrow \vec{V}_G = \frac{d\vec{R}_G}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \vec{v}_i$

これを用いると全運動量は

$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = M\vec{V}_G$




## 重心からの相対座標

$\vec{r}_i = \vec{R}_G + \vec{r}_i{}'$ のように$\vec{r}_i{}'$を定義。

$m_1\vec{r}_1{}' + \cdots + m_N\vec{r}_N{}'$

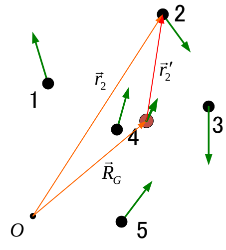
$= m_1(\vec{r}_1 - \vec{R}_G) + \cdots + m_N(\vec{r}_N - \vec{R}_G)$

$= m_1\vec{r}_1 + \cdots + m_N\vec{r}_N - M\vec{R}_G$

$= 0$

同様に

$m_1\vec{v}_1{}' + \cdots + m_N\vec{v}_N{}' = 0$



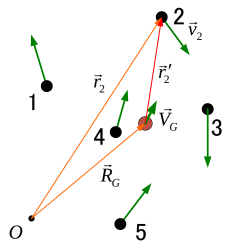

## 重心と全角運動量

$\vec{L} = \vec{L}_1 + \cdots + \vec{L}_N$

$= \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i$

$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$

$= \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i{}' + \vec{R}_G) \times m_i \frac{d(\vec{r}_i{}' + \vec{R}_G)}{dt}$




## 重心と全角運動量（続）

$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i{}' + \vec{R}_G) \times m_i \frac{d(\vec{r}_i{}' + \vec{R}_G)}{dt}$

$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i{}' \times m_i \frac{d\vec{r}_i{}'}{dt} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i{}' \times m_i \frac{d\vec{R}_G}{dt} + \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_G \times m_i \frac{d\vec{r}_i{}'}{dt} + \sum_{i=1}^{N} \vec{R}_G \times m_i \frac{d\vec{R}_G}{dt}$

$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i{}' \times m_i \frac{d\vec{r}_i{}'}{dt} + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i{}'\right) \times \frac{d\vec{R}_G}{dt} + \vec{R}_G \times \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i{}'}{dt}\right) + \vec{R}_G \times \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) \frac{d\vec{R}_G}{dt}$

$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i{}' \times m_i \frac{d\vec{r}_i{}'}{dt} + \vec{R}_G \times M \frac{d\vec{R}_G}{dt} = \vec{L}' + \vec{L}_G$

ただし $\vec{L}' \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i{}' \times m_i \frac{d\vec{r}_i{}'}{dt}$、 および $\vec{L}_G \equiv \vec{R}_G \times M \frac{d\vec{R}_G}{dt}$

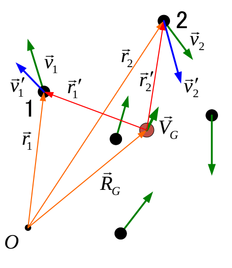
## $L'$, $L_G$ って？

$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_G$

$\vec{L}' \equiv \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i{}' \times m_i \frac{d\vec{r}_i{}'}{dt}$

$= \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i{}' \times m_i \vec{v}_i{}' = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i{}' \times m_i (\vec{v}_i - \vec{V}_G)$

$\vec{L}_G \equiv \vec{R}_G \times M \frac{d\vec{R}_G}{dt} = \vec{R}_G \times \vec{P}_G$




## 「重心回りの角運動量」

$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{L}_G \Rightarrow \vec{L}' = \vec{L} - \vec{L}_G$ より $\frac{d\vec{L}'}{dt} = \frac{d\vec{L}}{dt} - \frac{d\vec{L}_G}{dt}$

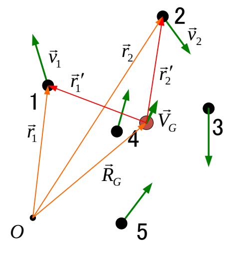
ここで

$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{K}_i$

$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{R}_G \times M \frac{d\vec{R}_G}{dt}\right)$

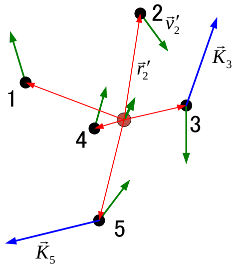
$= \frac{d\vec{R}_G}{dt} \times M \frac{d\vec{R}_G}{dt} + \vec{R}_G \times M \frac{d^2\vec{R}_G}{dt^2}$

$= \vec{R}_G \times M \frac{d^2\vec{R}_G}{dt^2} = \vec{R}_G \times \sum_{i=1}^{N} \vec{K}_i$



## 「重心回りの角運動量」(続)

$$\frac{d\vec{L}'}{dt}=\frac{d\vec{L}}{dt}-\frac{d\vec{L}_G}{dt}$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i\times\vec{K}_i-\vec{R}_G\times\sum_{i=1}^{N}\vec{K}_i$$
$$=\sum_{i=1}^{N}(\vec{r}_i-\vec{R}_G)\times\vec{K}_i$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i'\times\vec{K}_i$$




## 結局...

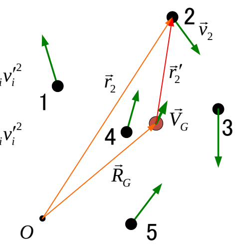
$$\frac{d\vec{L}'}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i'\times\vec{K}_i$$

- 「質点系の、重心に関する全角運動量の時間変化は、重心に関する外力のトルクの総和に等しい」
  (「重心に関する」=「重心を原点とした」)
- 重心の運動状態によらない(重心が加速度運動していても成立する)。

## 質点系の運動エネルギー

$$K=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i^2=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\left|\vec{V}_G+\vec{v}_i'\right|^2$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i V_G^{\ 2}+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i 2\vec{V}_G\cdot\vec{v}_i'+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i'^2$$
$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}m_i\right)V_G^{\ 2}+\vec{V}_G\cdot\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_i'+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i'^2$$
$$=\frac{1}{2}MV_G^{\ 2}+\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i'^2=\frac{1}{2}MV_G^{\ 2}+K'$$

ただし $K'\equiv\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i'^2$




## 「重心回りの...」のまとめ

$\vec{P}=\vec{P}_G,\qquad \vec{P}'=\sum_{i=1}^{N}m_i\vec{v}_i'=0$

- 「重心回りの全運動量」は0

$\vec{L}=\vec{R}_G\times\vec{P}_G+\vec{L}',\qquad \vec{L}'=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i'\times m_i\vec{v}_i'$

- 「重心回りの全角運動量」は全角運動量から「重心の角運動量」を引いたもの

$\frac{d\vec{L}'}{dt}=\sum_{i=1}^{N}\vec{r}_i'\times\vec{K}_i$

- 重心周りの全角運動量の時間変化は「重心周りの全トルク」

$K=\frac{1}{2}MV_G^{\ 2}+K',\qquad K'=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i v_i'^2$

- 「重心回りの運動エネルギー」は、全運動エネルギーから「重心の運動エネルギー」を引いたもの