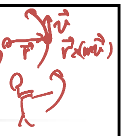
物理学 I（力学）12 回目：剛体の運動

中野武雄

2012年6月26日

10回目課題の解答(1)



Q: 一流選手のハンマー投げの初速は30 [m/s] であると言う。ハンマーの質量が7.3 [kg]、回転中心からの距離がワイヤー長+人間の腕→1.8 [m] のとき、リリース直前のハンマーの角運動量の大きさを計算せよ。原点は回転中心とせよ。

A: リリース直前のハンマーの速度ベクトルは、ワイヤーの方向と垂直とみなせるので、位置ベクトルと運動量ベクトルは垂直。よって

$$\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r}\times\vec{p}\right| = \left|\vec{r}\right|\left|\vec{p}\right| = \left|\vec{r}\right| m \left|\vec{v}\right|$$

$$= 1.8[\mathrm{m}]\times 7.3[\mathrm{kg}]\times 30[\mathrm{m/s}] = 3.94\times 10^2[\mathrm{kgm^2/s}]$$

[kgm/s]=[N]

10回目課題の解答(2)

Q: 静止衛星「ひまわり6号」の重量は1.6 [t]である。軌道半径を4万2千 km、回転周期を24 [h] として、回転中心(=地球の中心)回りの角運動量をSI単位で求めよ。

A:

(1) と同様に $\left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r}\right| m \left|\vec{v}\right| = \left|\vec{r}\right| m \left|\vec{r}\right|\omega = \boxed{\left|\vec{r}\right|^2 m \frac{2\pi}{T}}$

$$= \left(4.2\times 10^4[\mathrm{km}]\right)^2 \times 1.6[\mathrm{t}]\times\frac{2\pi}{24[\mathrm{h}]}$$

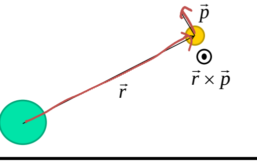
$$= 7.39\times 10^8[\cancel{\mathrm{t}}\,\cancel{\mathrm{km}}^2/\cancel{\mathrm{h}}]\times\left(\frac{1000[\mathrm{m}]}{1[\cancel{\mathrm{km}}]}\right)^2\times\left(\frac{1000[\mathrm{kg}]}{1[\cancel{\mathrm{t}}]}\right)\times\left(\frac{1[\cancel{\mathrm{h}}]}{3600[\mathrm{s}]}\right)$$

$$= 2.05\times 10^{14}[\mathrm{kg\,m^2/s}]$$

10回目課題の解答(3)

Q: ひまわりの角運動量ベクトルの向きは、地球の自転軸と平行になる。南極→北極の向きか、北極→南極の向きかを答えよ。適宜図を描き、理由も述べること。

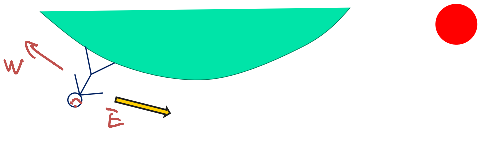
A: 北極から見たとき、地球の自転は反時計回り。静止衛星の回転方向も同じなので、 $\vec{r}\times\vec{p}$ の外積の方向は南極→北極の向き。



10回目課題の解答(3補)

Q: 北極から見たとき、地球の自転は反時計回り？

A: 赤道に人間が北を向いて立っているとすると、彼の右側が東。太陽は徐々に東(右側)から昇ってくるのだから、北極から見た地球の回転は反時計回り。



10回目課題の解答(4-a)

Q: フーコーの振子は、紐の長さが 67mだったと言われる。重力加速度 g=9.8 [m/s²] とし、微小振動の仮定のもと、この振子が一日に何往復するか計算せよ。

A: 微小振動の振り子の角振動数 ω は

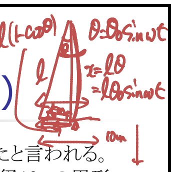
$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{なので、周期} T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

時間 T_D の間には T_D/T 回だけ往復する。よって

$$\frac{T_D}{T} = \frac{T_D}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{86400[\mathrm{s}]}{2\pi}\times\sqrt{\frac{9.8[\mathrm{m/s^2}]}{67[\mathrm{m}]}} = 5.26\times 10^3$$

5.26×10^3
5260
5300
5.3×10^3

9回目課題の解答(4-b)



Q: フーコーの振子は、紐の長さが 67mだったと言われる。重力加速度 g=9.8 [m/s²] とし、振子が直径10mの円形の部屋一杯に振れるとき、振子の最大速度は何 m/s となるか。

A: 振子は$x=5$[m]まで横に移動する。このとき最低の位置からの上昇分をhとすると、

$$h=l-\sqrt{l^2-x^2}=67[\mathrm{m}]-\sqrt{(67[\mathrm{m}])^2-(5[\mathrm{m}])^2}=0.187[\mathrm{m}]。$$

エネルギー保存則より $\frac{1}{2}mv^2=mgh$ だから、

$$v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times9.8[\mathrm{m/s}^2]\times0.187[\mathrm{m}]}=1.9[\mathrm{m/s}]$$

今日の内容

- 前回のおさらい
  - 質点系の運動
  - 力の合成・分解
  - 重心回りの運動
- 剛体の運動
  - 剛体の自由度
  - 剛体の運動の式
- 慣性モーメント
  - 慣性モーメントの定義
  - 慣性モーメントと角運動量・運動エネルギー
  - 連続体の剛体に対する計算

質点系の全運動量・全角運動量とその時間変化

全運動量

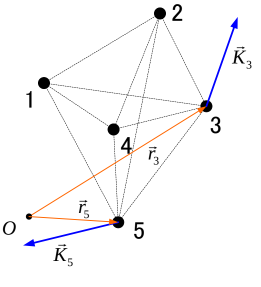
$$\vec{P}=\vec{p}_1+\cdots+\vec{p}_N$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{K}_1+\cdots+\vec{K}_N$$

全角運動量

$$\vec{L}=\vec{L}_1+\cdots+\vec{L}_N$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}_1\times\vec{K}_1+\cdots+\vec{r}_N\times\vec{K}_N$$



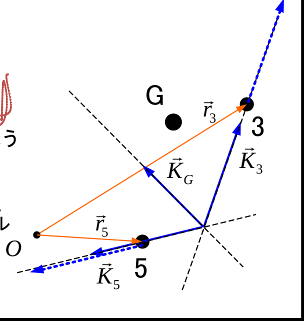
力の「作用線」と合成

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{K}_1+\cdots+\vec{K}_N$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}_1\times\vec{K}_1+\cdots+\vec{r}_N\times\vec{K}_N$$

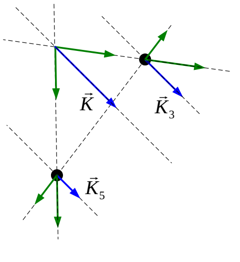
の右辺を変えないような合成

- 作用線が交わったところで平行四辺形ルールの合成を行えば良い →新しい作用線



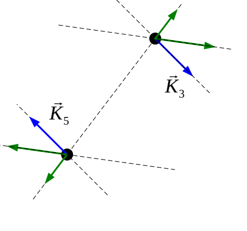
作用線が平行な場合

- 仮想的に、向きが反対で大きさが等しく、同じ作用線上にある2つの力を考える
- 合成して、新しい作用線の上で平行移動
- 作用線の交点で合成すればよい。



合成できない2力→偶力

- 大きさが等しく向きが正反対で、同じ作用線上にない2つの力
- さきほどの仮想的な力を加えても、やはり平行線のまま
- どの原点から見ても、力のモーメントの和が等しくなる



重心と全運動量

重心ベクトル

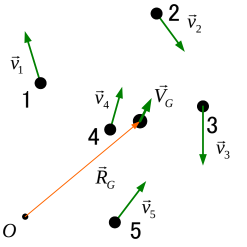
$$\vec{R}_G \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \vec{r}_i \quad \left(ただし M \equiv \sum_{i=1}^{N} m_i \right)$$

重心の「速度」

$$\vec{V}_G = \frac{d\vec{R}_G}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{M} \vec{v}_i$$

全運動量

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = M\vec{V}_G$$

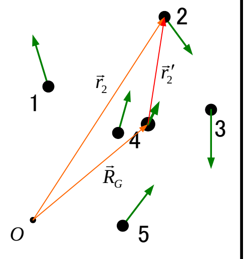


重心からの相対座標

$\vec{r}_i = \vec{R}_G + \vec{r}_i'$ のように $\vec{r}_i'$ を定義。

$$m_1\vec{r}_1' + \cdots + m_N\vec{r}_N' = 0$$
$$m_1\vec{v}_1' + \cdots + m_N\vec{v}_N' = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = M\vec{R}_G = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{R}_G \text{ より} \right)$$



重心相対座標を用いた保存量の分離

$$\vec{P} = \vec{P}_G \left(= M\vec{V}_G\right) \qquad \vec{P}' = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i' = 0$$

- 「重心回りの全運動量」は0

$$\vec{L} = \vec{R}_G \times \vec{P}_G + \vec{L}' \qquad \vec{L}' = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times m_i \vec{v}_i'$$

- 「重心回りの全角運動量」は全角運動量から「重心の角運動量」を引いたもの

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i' \times \vec{K}_i$$

- 重心周りの全角運動量の時間変化は「重心周りの全トルク」

$$K = \frac{1}{2} M V_G{}^2 + K' \qquad K' = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i'^2$$

- 「重心回りの運動エネルギー」は、全運動エネルギーから「重心の運動エネルギー」を引いたもの

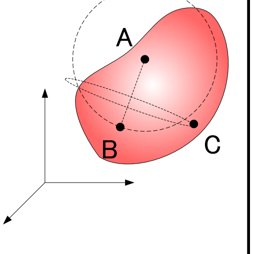
剛体の運動

剛体：特殊な質点系

- 各質点間の距離が常に一定に保たれている質点系
→「変形しない」ので「剛体」
- 3次元における質点の位置を指定するには変数が 3 つ必要。
→n 個の質点からなる質点系の「位置状態」を表現するには 3n 個の変数が必要。
- 剛体の「状態」の表現に必要な変数の数は：
  - 3次元では 6 個　　　　→自由度6
  - 平面運動（2次元）では 3 個→自由度3

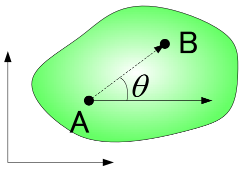
3次元の剛体の自由度=6

- 剛体の内部に、同一直線上に無い3点 A, B, C を取る
  - A は 3 次元を自由に動かして良いので自由度は 3
  - B は A との距離が等しい球面上のみ動けるので自由度は 2
  - C は AB を通る軸を中心とする回転のみ許されるので、自由度は 1
- 以上で剛体の配置は全て決定。
自由度は 3+2+1=6。



平面運動する剛体の自由度=3

- 同様に剛体の内部に2点 A, B を取る。
  - A は 2 次元平面内を自由に動ける
  - B は A との距離が一定な円周上を動く
- これで全て決定するので、自由度は 2+1=3



剛体の運動の式

- 自由度6を、以下のように分配するのが一般的
  - 重心の xyz 座標(→自由度3)
  - x軸、y軸、z軸に平行な軸回りの回転角(→自由度3)

$$M\frac{d^2\vec{R}_G}{dt^2}=\sum_j \vec{K}_j$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_j \vec{N}_j\left(=\sum_j \vec{r}_j\times\vec{K}_j\right)$$

$$\left(\text{あるいは}\frac{d\vec{L}'}{dt}=\sum_j \vec{N}'_j=\sum_j \vec{r}'_j\times\vec{K}_j\right)$$

剛体の運動の式(平面運動)

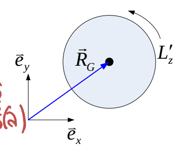
ベクトルの式

$$M\frac{d^2\vec{R}_G}{dt^2}=\sum_j \vec{K}_j$$

2成分(x,y)

$$\frac{d\vec{L}'}{dt}=\sum_j \vec{N}'_j\left(=\sum_j \vec{r}'_j\times\vec{K}_j\right)$$

1成分(z軸方向)



成分([illegible])の式

$$\Rightarrow\begin{cases} M\dfrac{d^2x_G}{dt^2}=\sum_j X_j \\ M\dfrac{d^2y_G}{dt^2}=\sum_j Y_j \\ \dfrac{dL'_z}{dt}=\sum_j \vec{N}'_j=\sum_j\left(x'_jY_j-y'_jX_j\right)\end{cases}$$

$\left(\text{ただし}\vec{K}_j=X_j\vec{e}_x+Y_j\vec{e}_y\right)$

剛体の力の釣り合い

- 運動量の時間変化が 0(加速度が 0)
- 角運動量の時間変化が 0

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\vec{K}_1+\cdots+\vec{K}_N=0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{r}_1\times\vec{K}_1+\cdots+\vec{r}_N\times\vec{K}_N=0$$

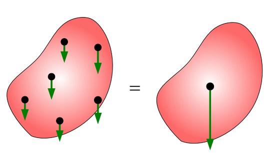
- 力ベクトルの総和が 0
- 偶力がない

参考:質点系に加わる重力の合成

$$\frac{d\vec{P}}{dt}=\sum_{i=1}^N m_i\vec{g}=M\vec{g}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\sum_{i=1}^N \vec{r}_i\times m_i\vec{g}=\sum_{i=1}^N m_i\vec{r}_i\times\vec{g}=M\vec{R}_G\times\vec{g}=\vec{R}_G\times M\vec{g}$$

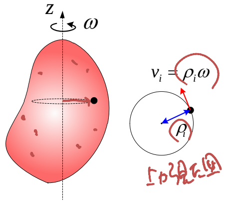
- 重力下におかれた質点系(剛体)では:
  - 重心に全質量分の重力がかかったと考えてよい
  - 重力による重心回りのトルクは0



剛体の慣性モーメント

軸回りの回転と角運動量

- 固定軸(=z軸)回りの回転を考える。



z 軸上に原点を置く。剛体を構成する質点 m_i の角運動量の z 成分 L_{iz}は、

$$L_{iz} = (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)_z = m_i (x v_y - y v_x)$$

このとき質点は円運動をしているから、軸からの距離 ρ_i を

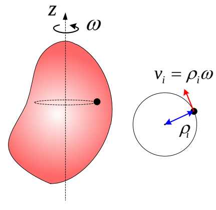
質点の軸に下ろした垂線の長さ。

$$\rho_i = \sqrt{x^2 + y^2}$$

として

$$L_{iz} = m_i \rho_i (\rho_i \omega) = m_i {\rho_i}^2 \omega$$

軸回りの回転と角運動量(補)



平面上の円運動では

$\vec{\rho} = \rho_i \cos\omega t\, \vec{e}_x + \rho_i \sin\omega t\, \vec{e}_y$ に対して

$$\vec{v} = -\omega\rho_i \sin\omega t\, \vec{e}_x + \omega\rho_i \cos\omega t\, \vec{e}_y$$

であるので、

$$\left|\vec{L}_i\right| = m_i \left| x v_y - y v_x \right|$$

$$= m_i {\rho_i}^2 \omega \left(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t \right) = m_i {\rho_i}^2 \omega$$

慣性モーメント

剛体の全角運動量の z 成分は

$$L_z = \sum_i m_i {\rho_i}^2 \omega = \left(\sum_i m_i \rho_i^2 \right) \omega$$

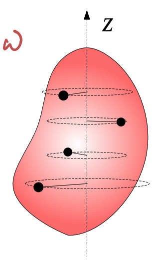
剛体では ωはすべての質点に対して一定だから、

「z 軸回りの慣性モーメント」を

$$I_z \equiv \sum_i m_i {\rho_i}^2$$

と定義すると

$$L_z = I_z \omega$$



慣性モーメントと角運動量

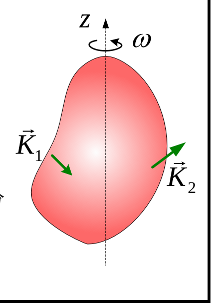
$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z \omega) = I_z \frac{d\omega}{dt}$$

⇒剛体のトルク方程式(z 成分)は

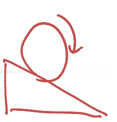
$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum_j N_{zj}$$

ただし N_{zj} は位置 $\vec{r}_j = (x_j, y_j, z_j)$に作用する外力 $\vec{K}_i = (X_j, Y_j, Z_j)$ によるトルクの z 成分

$$N_{zj} = x_j Y_j - y_j X_j$$



(再び)剛体の平面運動



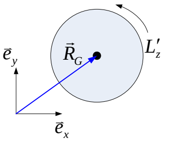
$$M \frac{d^2 x_G}{dt^2} = \sum_j X_j$$

$$M \frac{d^2 y_G}{dt^2} = \sum_j Y_j$$

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum_j \left(x'_j Y_j - y'_j X_j \right)$$

この場合のIzは重心回りの慣性モーメント

ただし $\vec{K}_j = X_j \vec{e}_x + Y_j \vec{e}_y$



慣性モーメントと回転運動のエネルギー

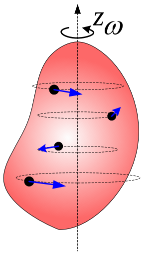
剛体の各質点の速度は $\rho_i \omega$

$$\Rightarrow \quad K = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\rho_i \omega)^2$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i {\rho_i}^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

回転物体の運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

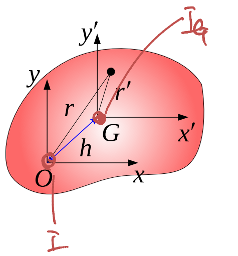


慣性モーメントの定理(1)
平行軸の定理

剛体の重心Gを通る軸の回りの慣性モーメントをI_Gとし、その軸に平行で、重心から h だけ離れた軸の回りの慣性モーメントをIとすると、

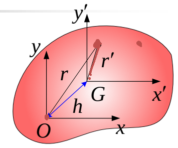
$$I = I_G + Mh^2$$

(ただしMは剛体の質量)



慣性モーメントの定理(1)
証明

Oから見た重心の座標を(x_G, y_G)、質点iを(x_i, y_i)とする。また重心から見た質点iの座標を(x_i', y_i')とする。



$$x_i = x_i' + x_G, \quad y_i = y_i' + y_G$$

$$m_i(x_i^2 + y_i^2) = m_i(x_i'^2 + y_i'^2) + 2m_i(x_G x_i' + y_G y_i') + \underbrace{m_i(x_G^2 + y_G^2)}_{h^2}$$

$$I = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

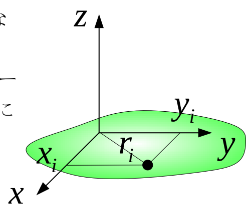
$$= \sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2) + 2x_G \underbrace{\sum_i m_i x_i'}_{0} + 2y_G \underbrace{\sum_i m_i y_i'}_{0} + h^2 \sum_i m_i$$

$$= I_G + Mh^2$$

慣性モーメントの定理(2)
平板における直交軸の定理

$x-y$平面に置かれた厚さが一様な薄い平板状の剛体の一点を通り、剛体面に垂直なz軸回りの慣性モーメントI_zは、同じ点を通るx, y軸に平行な軸回りの慣性モーメントI_x, I_yとの間に以下の関係がある。

$$I_z = I_x + I_y$$



慣性モーメントの定理(2)
証明

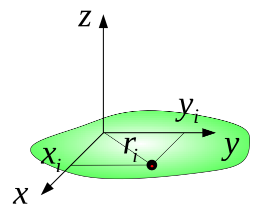
$$I_Z = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2$$

剛体は薄いので、

$$I_y = \sum_i m_i x_i^2$$

$$I_x = \sum_i m_i y_i^2$$

よって$I_z = I_x + I_y$



連続体としての剛体の取扱い

質点系から連続体へ:重積分

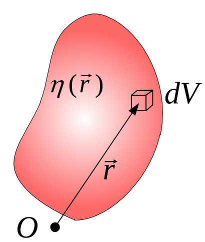
剛体を細かく切り刻み、微小体積dVを定義する。位置$\vec{r}$における密度を$\eta(\vec{r})$とおけば、

$$m_i \to \eta(\vec{r})dV$$

と対応が取れる。

これを用いて質点に対する和を積分に変換する。

$$\sum_i m_i \alpha_i \to \int \alpha(\vec{r})\eta(\vec{r})dV$$



連続体の全質量と重心

全質量：

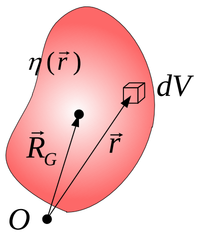
$$M=\sum_i m_i$$

$$\rightarrow \quad M=\int \eta(\vec{r})dV$$

重心ベクトル：

$$\vec{R}_G=\frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i$$

$$\rightarrow \quad \vec{R}_G=\frac{1}{M}\int \vec{r}\,\eta(\vec{r})dV$$



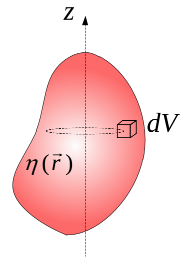
連続体の慣性モーメント

慣性モーメント

$$I_z=\sum_i m_i\rho_i^2$$

$$\rightarrow I_z=\int \eta(\vec{r})\rho^2 dV$$

ただしここでのρは、
対象の軸から微小体積
までの距離。



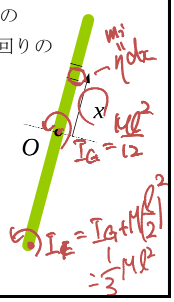
慣性モーメントの計算例：棒

棒の重心は中点。棒の長さをl，長さあたりの
質量をηとし、重心を通って棒に垂直な軸回りの
慣性モーメントを求める。

$$I_G=\int_{-l/2}^{l/2} x^2\eta dx=\left[\eta\frac{x^3}{3}\right]_{-l/2}^{l/2}=\frac{\eta l^3}{12}$$

$M=\eta l$を用いて、

$$I_G=\frac{Ml^2}{12}$$



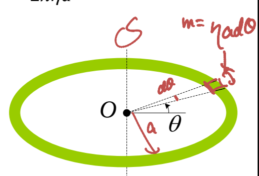
慣性モーメントの計算例：円環

半径aの円環の中心軸回りの慣性モーメントを求める。
長さあたりの質量をηとすると

$$I_G=\int_0^{2\pi} a^2\eta a d\theta=\left[\eta a^3\theta\right]_0^{2\pi}=2\pi\eta a^3$$

$M=2\pi a\eta$ を用いて、

$$I_G=Ma^2$$



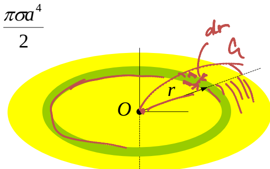
慣性モーメントの計算例：円板

半径aの円板の中心軸回りの慣性モーメントを求める。
円板の面積あたりの質量をσとし、半径rの位置に
幅drの細い円環を考える。この重さは$2\pi r\sigma dr$なので
慣性モーメントは$2\pi\sigma r^3 dr$。これを$0\rightarrow a$まで積分して、

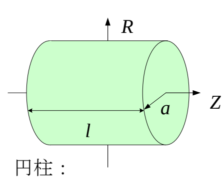
$$I_G=\int_0^a 2\pi\sigma r^3 dr=2\pi\sigma\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^a=\frac{\pi\sigma a^4}{2}$$

$M=\pi a^2\sigma$ を用いて、

$$I_G=\frac{1}{2}Ma^2$$



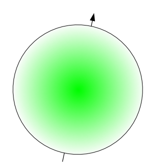
その他代表的な慣性モーメント：



円柱：

$$I_{GZ}=\frac{1}{2}Ma^2$$

$$I_{GR}=\frac{M}{4}a^2+\frac{M}{12}l^2$$



球：半径をaとして

$$I_G=\frac{2}{5}Ma^2$$