

物理学 I (力学) 12 回目: 剛体の運動

中野武雄
2012年6月26日

10回目課題の解答(1)



Q: 一流選手のハンマー投げの初速は30 [m/s] であると言う。ハンマーの質量が7.3 [kg]、回転中心からの距離がワイヤー長+人間の腕→1.8 [m] のとき、リリース直前のハンマーの角運動量の大きさを計算せよ。原点は回転中心とせよ。

A: リリース直前のハンマーの速度ベクトルは、ワイヤーの方向と垂直とみなせるので、位置ベクトルと運動量ベクトルは垂直。よって

$$|\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = |\vec{r}| |\vec{p}| = |\vec{r}| m |\vec{v}|$$

$$= 1.8[\text{m}] \times 7.3[\text{kg}] \times 30[\text{m/s}] = 3.94 \times 10^2 [\text{kgm}^2/\text{s}]$$

10回目課題の解答(2)



Q: 静止衛星「ひまわり6号」の重量は1.6 [t]である。軌道半径を4万2千 km、回転周期を24 [h]として、回転中心(=地球の中心)回りの角運動量をSI単位で求めよ。

A: (1) と同様に $|\vec{L}| = |\vec{r}| m |\vec{v}| = |\vec{r}| m |\vec{v}| \omega = |\vec{r}|^2 m \frac{2\pi}{T}$ [kgm²/s] = Nm

$$= (4.2 \times 10^4 [\text{km}])^2 \times 1.6[\text{t}] \times \frac{2\pi}{24[\text{h}]}$$

$$= 7.39 \times 10^8 [\text{km}^2/\text{h}] \times \left(\frac{1000[\text{m}]}{1[\text{km}]} \right)^2 \times \left(\frac{1000[\text{kg}]}{1[\text{t}]} \right) \times \left(\frac{1[\text{h}]}{3600[\text{s}]} \right)$$

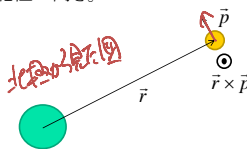
$$= 2.05 \times 10^{14} [\text{kgm}^2/\text{s}]$$

N·m·s

10回目課題の解答(3)

Q: ひまわりの角運動量ベクトルの向きは、地球の自転軸と平行になる。南極→北極の向きか、北極→南極の向きかを答えよ。適宜図を描き、理由も述べること。

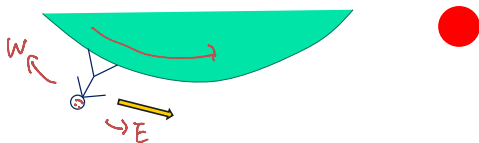
A: 北極から見たとき、地球の自転は反時計回り。静止衛星の回転方向も同じなので、 $\vec{r} \times \vec{p}$ の外積の方向は南極→北極の向き。



10回目課題の解答(3補)

Q: 北極から見たとき、地球の自転は反時計回り?

A: 赤道に人間が北を向いて立っているとすると、彼の右側が東。太陽は徐々に東(右側)から昇ってくるのだから、北極から見た地球の回転は反時計回り。



10回目課題の解答(4-a)

Q: フーコーの振り子は、紐の長さが67mだったと言われる。重力加速度 $g=9.8 [\text{m/s}^2]$ とし、微小振動の仮定のもと、この振り子が一日に何往復するか計算せよ。

A: 微小振動の振り子の角振動数は $\omega = \omega_0 \sin \omega t$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

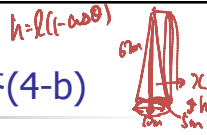
なので、周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

時間 T_D の間には T_D/T 回だけ往復する。よって

$$\frac{T_D}{T} = \frac{T_D}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{86400[\text{s}]}{2\pi} \times \sqrt{\frac{9.8[\text{m/s}^2]}{67[\text{m}]}} = 5.26 \times 10^3$$

f260
5300
0.53x10³

9回目課題の解答(4-b)



Q: フーコーの振子は、紐の長さが 67m だったと言われる。重力加速度 $g=9.8$ [m/s²] とし、振子が直径 10m の円形の部屋一杯に振れるとき、振子の最大速度は何 m/s となるか。

A: 振子は $x = 5$ [m] まで横に移動する。このとき最低の位置からの上昇分を h とすると、

$$h = l - \sqrt{l^2 - x^2} = 67[\text{m}] - \sqrt{(67[\text{m}])^2 - (5[\text{m}])^2} = 0.187[\text{m}]_s$$

エネルギー保存則より $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$ だから、

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8[\text{m/s}^2] \times 0.187[\text{m}]} = 1.9[\text{m/s}]$$

今日の内容

- 前回のおさらい
 - 質点系の運動
 - 力の合成・分解
 - 重心回りの運動
- 剛体の運動
 - 剛体の自由度
 - 剛体の運動の式
- 慣性モーメント
 - 慣性モーメントの定義
 - 慣性モーメントと角運動量・運動エネルギー
 - 連続体の剛体に対する計算

質点系の全運動量・全角運動量とその時間変化

全運動量

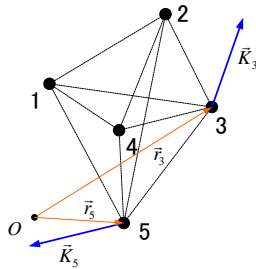
$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \dots + \vec{p}_N$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{K}_1 + \dots + \vec{K}_N$$

全角運動量

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \dots + \vec{L}_N$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{K}_1 + \dots + \vec{r}_N \times \vec{K}_N$$



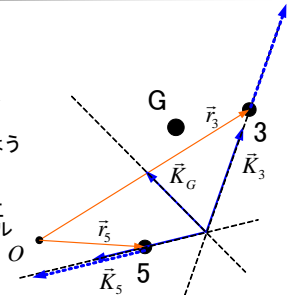
力の「作用線」と合成

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{K}_1 + \dots + \vec{K}_N$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{K}_1 + \dots + \vec{r}_N \times \vec{K}_N$$

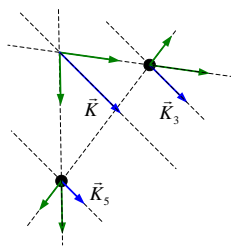
の右辺を変えないような合成

- 作用線が交わったところで平行四辺形ルールを合成を行えば良い
→新しい作用線



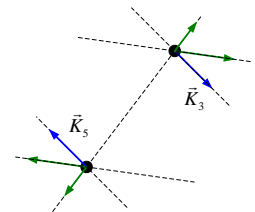
作用線が平行な場合

- 仮想的に、向きが反対で大きさが等しく、同じ作用線上にある2つの力を考える
- 合成して、新しい作用線の上で平行移動
- 作用線の交点で合成すればよい。



合成できない2力→偶力

- 大きさが等しく向きが正反対で、同じ作用線上にない2つの力
- さきほどの仮想的な力を加えても、やはり平行線のまま
- どの原点から見ても、力のモーメントの和が等しくなる



重心と全運動量

重心ベクトル

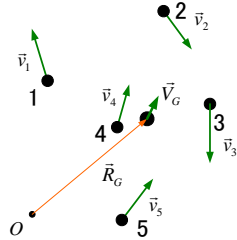
$$\vec{R}_G \equiv \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \vec{r}_i \quad \left(\text{ただし } M \equiv \sum_{i=1}^N m_i \right)$$

重心の「速度」

$$\vec{V}_G = \frac{d\vec{R}_G}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{M} \vec{v}_i$$

全運動量

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = M \vec{V}_G$$



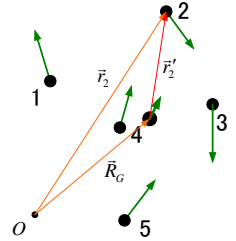
重心からの相対座標

$\vec{r}_i = \vec{R}_G + \vec{r}'_i$ のように \vec{r}'_i を定義。

$$m_1 \vec{r}'_1 + \dots + m_N \vec{r}'_N = 0$$

$$m_1 \vec{v}'_1 + \dots + m_N \vec{v}'_N = 0$$

$$\left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = M \vec{R}_G = \sum_{i=1}^N m_i \vec{R}_G \text{ より } \right)$$



重心相対座標を用いた 保存量の分離

$$\vec{P} = \vec{P}_G (= M \vec{V}_G) \quad \vec{P}' = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}'_i = 0 \quad \text{「重心回りの全運動量」は0}$$

$$\vec{L} = \vec{R}_G \times \vec{P}_G + \vec{L}' \quad \vec{L}' = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times m_i \vec{v}'_i \quad \text{「重心回りの全角運動量」は全角運動量から「重心の角運動量」を引いたもの}$$

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{r}'_i \times \vec{K}'_i \quad \text{重心周りの全角運動量の時間変化は「重心周りの全トルク」}$$

$$K = \frac{1}{2} M V_G^2 + K' \quad K' = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i'^2 \quad \text{「重心回りの運動エネルギー」は、全運動エネルギーから「重心の運動エネルギー」を引いたもの}$$

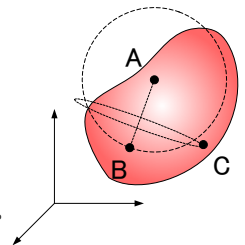
剛体の運動

剛体: 特殊な質点系

- 各質点間の距離が常に一定に保たれている質点系 → 「変形しない」ので「剛体」
- 3次元における質点の位置を指定するには変数が3つ必要。
→ n個の質点からなる質点系の「位置状態」を表現するには3n個の変数が必要。
- 剛体の「状態」の表現に必要な変数の数は:
 - 3次元では6個 → 自由度6
 - 平面運動(2次元)では3個 → 自由度3

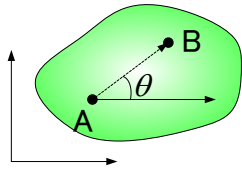
3次元の剛体の自由度=6

- 剛体の内部に、同一直線上に無い3点 A, B, C を取る
 - A は3次元を自由に動かして良いので自由度は3
 - B はAとの距離が等しい球面上のみ動けるので自由度は2
 - C はABを通る軸を中心とする回転のみ許されるので、自由度は1
- 以上で剛体の配置は全て決定。自由度は3+2+1=6。



平面運動する剛体の自由度=3

- 同様に剛体の内部に2点 A, B を取る。
 - A は 2次元平面内を自由に動ける
 - B は A との距離が一定な円周上を動く
- これで全て決定するので、自由度は $2+1=3$



剛体の運動の式

- 自由度6を、以下のように分配するのが一般的
 - 重心の xyz 座標 (→自由度3)
 - x軸、y軸、z軸に平行な軸回りの回転角 (→自由度3)

$$\frac{d\vec{R}_G}{dt} = \sum_j \vec{K}_j \Rightarrow M \frac{d^2 \vec{R}_G}{dt^2} = \sum_j \vec{K}_j \quad \leftarrow \text{3次元空間} \rightarrow \text{成り立つ}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_j \vec{N}_j \left(= \sum_j \vec{r}_j \times \vec{K}_j \right) \rightarrow \text{3次元}$$

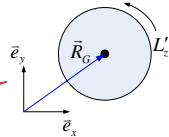
$$\left(\text{あるいは} \frac{d\vec{L}'}{dt} = \sum_j \vec{N}'_j = \sum_j \vec{r}'_j \times \vec{K}_j \right)$$

剛体の運動の式 (平面運動)

$$M \frac{d^2 \vec{R}_G}{dt^2} = \sum_j \vec{K}_j \quad \text{①}$$

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \sum_j \vec{N}'_j \left(= \sum_j \vec{r}'_j \times \vec{K}_j \right) \quad \text{②}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} M \frac{d^2 x_G}{dt^2} = \sum_j X_j \quad \text{③} \\ M \frac{d^2 y_G}{dt^2} = \sum_j Y_j \quad \text{④} \quad (\text{ただし } \vec{K}_j = X_j \vec{e}_x + Y_j \vec{e}_y) \\ \frac{dL'_z}{dt} = \sum_j \vec{N}'_j = \sum_j (x'_j Y_j - y'_j X_j) \quad \text{⑤} \end{cases}$$



剛体の力の釣り合い

- 運動量の時間変化が 0 (加速度が 0)
- 角運動量の時間変化が 0

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{K}_1 + \dots + \vec{K}_N = 0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{K}_1 + \dots + \vec{r}_N \times \vec{K}_N = 0$$

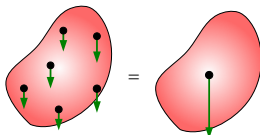
- カベクトルの総和が 0
- 偶力がない

参考: 質点系に加わる重力の合成

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{g} = M \vec{g}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{g} = M \vec{R}_G \times \vec{g} = \vec{R}_G \times M \vec{g}$$

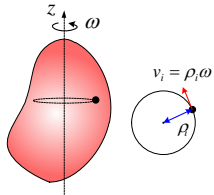
- 重力下におかれた質点系 (剛体) では:
 - 重心に全質量分の重力がかかったと考えてよい
 - 重力による重心回りのトルクは 0



剛体の慣性モーメント

軸回りの回転と角運動量

- 固定軸(=z軸)回りの回転を考える。



z軸上に原点を置く。剛体を構成する質点 m_i の角運動量のz成分 L_{iz} は、

$$L_{iz} = (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)_z = m_i (xv_y - yv_x)$$

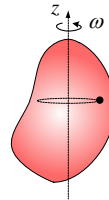
このとき質点は円運動をしているから、軸からの距離 ρ_i を

$$\rho_i = \sqrt{x^2 + y^2}$$

として

$$L_{iz} = m_i \rho_i (\rho_i \omega) = m_i \rho_i^2 \omega$$

軸回りの回転と角運動量(補)



平面上の円運動では

$$\vec{\rho} = \rho_i \cos \omega t \vec{e}_x + \rho_i \sin \omega t \vec{e}_y$$

に対して

$$\vec{v} = -\omega \rho_i \sin \omega t \vec{e}_x + \omega \rho_i \cos \omega t \vec{e}_y$$

であるので、

$$|\vec{L}_i| = m_i |xv_y - yv_x| = m_i \rho_i^2 \omega (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = m_i \rho_i^2 \omega$$

慣性モーメント

剛体の全角運動量のz成分は

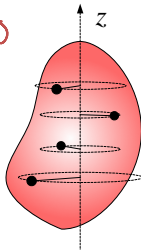
$$L_z = \sum_i m_i \rho_i^2 \omega = \left(\sum_i m_i \rho_i^2 \right) \omega$$

剛体では ω はすべての質点に対して一定だから、「z軸回りの慣性モーメント」を

$$I_z \equiv \sum_i m_i \rho_i^2$$

と定義すると

$$L_z = I_z \omega$$



慣性モーメントと角運動量

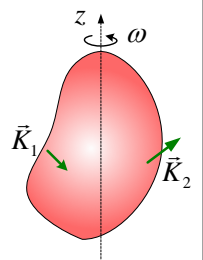
$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt} (I_z \omega) = I_z \frac{d\omega}{dt}$$

⇒ 剛体のトルク方程式 (z成分) は

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum_j N_{zj}$$

ただし N_{zj} は位置 $\vec{r}_j = (x_j, y_j, z_j)$ に作用する外力 $\vec{K}_j = (X_j, Y_j, Z_j)$ によるトルクのz成分

$$N_{zj} = x_j Y_j - y_j X_j$$



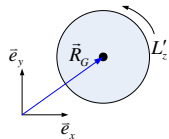
(再び) 剛体の平面運動

$$M \frac{d^2 x_G}{dt^2} = \sum_j X_j$$

$$M \frac{d^2 y_G}{dt^2} = \sum_j Y_j$$

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum_j (x'_j Y_j - y'_j X_j)$$

ただし $\vec{K}_j = X_j \vec{e}_x + Y_j \vec{e}_y$



慣性モーメントと回転運動のエネルギー

剛体の各質点の速度は $\rho_i \omega$

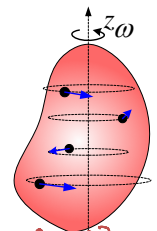
$$\Rightarrow K = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\rho_i \omega)^2$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i m_i \rho_i^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

回転物体の運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

Handwritten notes: x[m] x [m/s] = [m^2/s^2] I_z [kg m^2] = 00 [kg m^2]

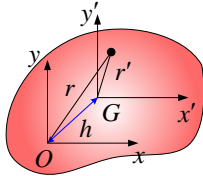


慣性モーメントの定理(1) 平行軸の定理

剛体の重心 G を通る軸の回りの慣性モーメントを I_G とし、その軸に平行で、重心から h だけ離れた軸の回りの慣性モーメントを I とすると、

$$I = I_G + Mh^2$$

(ただし M は剛体の質量)



慣性モーメントの定理(1) 証明

O から見た重心の座標を (x_G, y_G) 、質点 i を (x, y) とする。また重心から見た質点 i の座標を (x', y') とする。

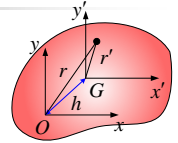
$$x_i = x'_i + x_G, \quad y_i = y'_i + y_G$$

$$m_i(x_i^2 + y_i^2) = m_i(x_i'^2 + y_i'^2) + 2m_i(x_G x'_i + y_G y'_i) + m_i(x_G^2 + y_G^2)$$

$$I = \sum_i m_i(x_i^2 + y_i^2)$$

$$= \sum_i m_i(x_i'^2 + y_i'^2) + 2x_G \sum_i m_i x'_i + 2y_G \sum_i m_i y'_i + h^2 \sum_i m_i$$

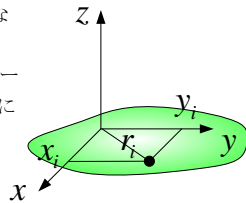
$$= I_G + Mh^2$$



慣性モーメントの定理(2) 平板における直交軸の定理

$x-y$ 平面に置かれた厚さが一様な薄い平板状の剛体の一点を通り、剛体面に垂直な z 軸回りの慣性モーメント I_z は、同じ点を通る x, y 軸に平行な軸回りの慣性モーメント I_x, I_y との間以下関係がある。

$$I_z = I_x + I_y$$



慣性モーメントの定理(2) 証明

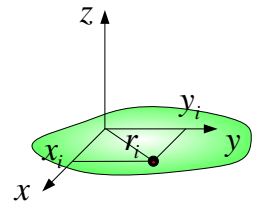
$$I_z = \sum_i m_i r_i^2 = \sum_i m_i x_i^2 + \sum_i m_i y_i^2$$

剛体は薄いので、

$$I_y = \sum_i m_i x_i^2$$

$$I_x = \sum_i m_i y_i^2$$

よって $I_z = I_x + I_y$



連続体としての剛体の取扱い

質点系から連続体へ: 重積分

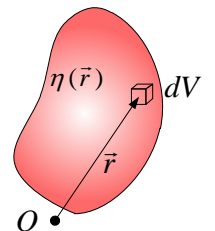
剛体を細かく切り刻み、微小体積 dV を定義する。位置 \vec{r} における密度を $\eta(\vec{r})$ とおけば、

$$m_i \rightarrow \eta(\vec{r})dV$$

と対応が取れる。

これを用いて質点に対する和を積分に変換する。

$$\sum_i m_i \alpha_i \rightarrow \int \alpha(\vec{r}) \eta(\vec{r}) dV$$



連続体の全質量と重心

全質量:

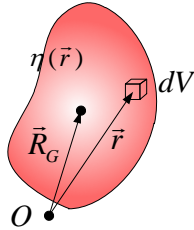
$$M = \sum_i m_i$$

$$\rightarrow M = \int \eta(\vec{r}) dV$$

重心ベクトル:

$$\vec{R}_G = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$\rightarrow \vec{R}_G = \frac{1}{M} \int \vec{r} \eta(\vec{r}) dV$$



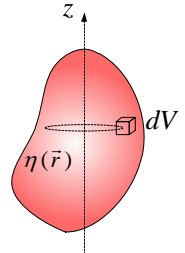
連続体の慣性モーメント

慣性モーメント

$$I_z = \sum_i m_i \rho_i^2$$

$$\rightarrow I_z = \int \eta(\vec{r}) \rho^2 dV$$

ただしここでのρは、対象の軸から微小体積までの距離。



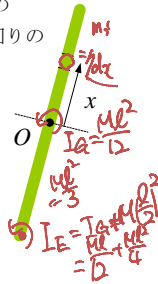
慣性モーメントの計算例: 棒

棒の重心は中点。棒の長さを l 、長さあたりの質量を η とし、重心を通過して棒に垂直な軸回りの慣性モーメントを求める。

$$I_G = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \eta dx = \left[\eta \frac{x^3}{3} \right]_{-l/2}^{l/2} = \frac{\eta l^3}{12}$$

$M = \eta l$ を用いて、

$$I_G = \frac{Ml^2}{12}$$



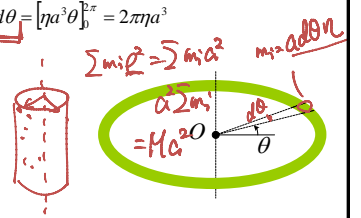
慣性モーメントの計算例: 円環

半径 a の円環の中心軸回りの慣性モーメントを求める。長さあたりの質量を η とすると

$$I_G = \int_0^{2\pi} a^2 \eta a d\theta = [\eta a^3 \theta]_0^{2\pi} = 2\pi \eta a^3$$

$M = 2\pi a \eta$ を用いて、

$$I_G = Ma^2$$



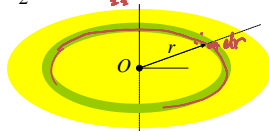
慣性モーメントの計算例: 円板

半径 a の円板の中心軸回りの慣性モーメントを求める。円板の面積あたりの質量を σ とし、半径 r の位置に幅 dr の細い円環を考える。この重さは $2\pi r \sigma dr$ なので慣性モーメントは $2\pi \sigma r^3 dr$ 。これを $0 \rightarrow a$ まで積分して、

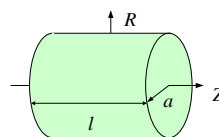
$$I_G = \int_0^a 2\pi \sigma r^3 dr = 2\pi \sigma \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{\pi \sigma a^4}{2}$$

$M = \pi a^2 \sigma$ を用いて、

$$I_G = \frac{1}{2} Ma^2$$



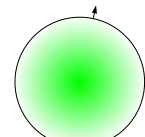
その他代表的な慣性モーメント:



円柱:

$$I_{GZ} = \frac{1}{2} Ma^2$$

$$I_{GR} = \frac{M}{4} a^2 + \frac{M}{12} l^2$$



球: 半径を a として

$$I_G = \frac{2}{5} Ma^2$$