物理学 I（力学）12 回目: 剛体の運動

中野武雄

2012年6月26日

今日の内容

- 前回のおさらい
  - 質点系の運動
  - 力の合成・分解
  - 重心回りの運動
- 剛体の運動
  - 剛体の自由度
  - 剛体の運動の式
- 慣性モーメント
  - 慣性モーメントの定義
  - 慣性モーメントと角運動量・運動エネルギー
  - 連続体の剛体に対する計算

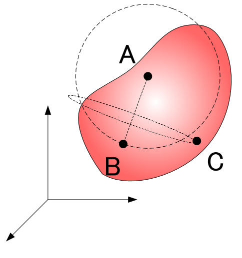
剛体の運動

剛体：特殊な質点系

- 各質点間の距離が常に一定に保たれている質点系
→「変形しない」ので「剛体」
- 3次元における質点の位置を指定するには
変数が 3 つ必要。
→n 個の質点からなる質点系の「位置状態」を
表現するには 3n 個の変数が必要。
- 剛体の「状態」の表現に必要な変数の数は：
  - 3次元では 6 個　　　　→自由度6
  - 平面運動（2次元）では 3 個→自由度3

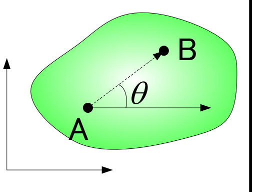
3次元の剛体の自由度=6

- 剛体の内部に、同一直線上に無い3点 A, B, C を取る
  - A は 3 次元を自由に動かして良いので自由度は 3
  - B は A との距離が等しい球面上のみ動けるので自由度は 2
  - C は AB を通る軸を中心とする回転のみ許されるので、自由度は 1
- 以上で剛体の配置は全て決定。
自由度は 3+2+1=6。



平面運動する剛体の自由度=3

- 同様に剛体の内部に2点 A, B を取る。
  - A は 2 次元平面内を自由に動ける
  - B は A との距離が一定な円周上を動く
- これで全て決定するので、自由度は 2+1=3



剛体の運動の式

- 自由度6を、以下のように分配するのが一般的
  - 重心の xyz 座標（→自由度3）
  - x軸、y軸、z軸に平行な軸回りの回転角（→自由度3）

$$M\frac{d^2\vec{R}_G}{dt^2} = \sum_j \vec{K}_j$$

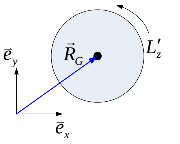
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_j \vec{N}_j \left(= \sum_j \vec{r}_j \times \vec{K}_j \right)$$

$$\left(\text{あるいは} \frac{d\vec{L}'}{dt} = \sum_j \vec{N}'_j = \sum_j \vec{r}'_j \times \vec{K}_j \right)$$

剛体の運動の式（平面運動）

$$M\frac{d^2\vec{R}_G}{dt^2} = \sum_j \vec{K}_j$$

$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \sum_j \vec{N}'_j \left(= \sum_j \vec{r}'_j \times \vec{K}_j \right)$$



$$\Rightarrow \begin{cases} M\dfrac{d^2x_G}{dt^2} = \sum_j X_j \\ M\dfrac{d^2y_G}{dt^2} = \sum_j Y_j \qquad \left(\text{ただし} \vec{K}_j = X_j\vec{e}_x + Y_j\vec{e}_y \right) \\ \dfrac{dL'_z}{dt} = \sum_j N'_j = \sum_j \left(x'_j Y_j - y'_j X_j \right) \end{cases}$$

剛体の力の釣り合い

- 運動量の時間変化が 0（加速度が 0）
- 角運動量の時間変化が 0

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{K}_1 + \cdots + \vec{K}_N = 0$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r}_1 \times \vec{K}_1 + \cdots + \vec{r}_N \times \vec{K}_N = 0$$

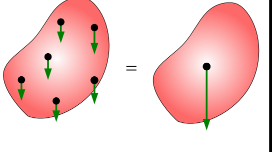
- 力ベクトルの総和が 0
- 偶力がない

参考：質点系に加わる重力の合成

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{g} = M\vec{g}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{g} = M\vec{R}_G \times \vec{g} = \vec{R}_G \times M\vec{g}$$

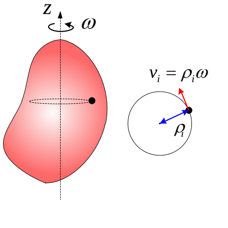
- 重力下におかれた質点系（剛体）では：
  - 重心に全質量分の重力がかかったと考えてよい
  - 重力による重心回りのトルクは0



剛体の慣性モーメント

軸回りの回転と角運動量

- 固定軸（=z軸）回りの回転を考える。



z軸上に原点を置く。剛体を構成する質点m_iの角運動量のz成分L_{iz}は、

$$L_{iz} = (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i)_z = m_i (x v_y - y v_x)$$

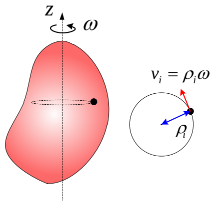
このとき質点は円運動をしているから、軸からの距離ρ_iを

$$\rho_i = \sqrt{x^2 + y^2}$$

として

$$L_{iz} = m_i \rho_i (\rho_i \omega) = m_i \rho_i^2 \omega$$

軸回りの回転と角運動量(補)



平面上の円運動では

$\vec{\rho} = \rho_i \cos\omega t\, \vec{e}_x + \rho_i \sin\omega t\, \vec{e}_y$ に対して

$\vec{v} = -\omega\rho_i \sin\omega t\, \vec{e}_x + \omega\rho_i \cos\omega t\, \vec{e}_y$

であるので、

$$\left|\vec{L}_i\right| = m_i \left|x v_y - y v_x\right|$$
$$= m_i \rho_i{}^2 \omega\left(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t\right) = m_i \rho_i{}^2 \omega$$

慣性モーメント

剛体の全角運動量の z 成分は

$$L_z = \sum_i m_i \rho_i{}^2 \omega$$

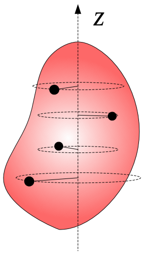
剛体では ω はすべての質点に対して一定だから、

「z 軸回りの慣性モーメント」を

$$I_z \equiv \sum_i m_i \rho_i{}^2$$

と定義すると

$$L_z = I_z \omega$$



慣性モーメントと角運動量

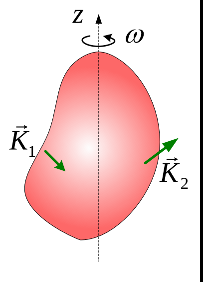
$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I_z\omega) = I_z \frac{d\omega}{dt}$$

⇒剛体のトルク方程式（z 成分）は

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum_j N_{zj}$$

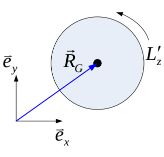
ただし N_{zj} は位置 $\vec{r}_j = (x_j, y_j, z_j)$ に作用する外力 $\vec{K}_i = (X_j, Y_j, Z_j)$ によるトルクの z 成分

$$N_{zj} = x_j Y_j - y_j X_j$$



(再び)剛体の平面運動

$$M \frac{d^2 x_G}{dt^2} = \sum_j X_j$$
$$M \frac{d^2 y_G}{dt^2} = \sum_j Y_j$$
$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = \sum_j \left(x'_j Y_j - y'_j X_j\right)$$



ただし $\vec{K}_j = X_j \vec{e}_x + Y_j \vec{e}_y$

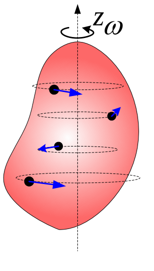
慣性モーメントと回転運動のエネルギー

剛体の各質点の速度は $\rho_i \omega$

$$\Rightarrow \quad K = \sum_i \frac{1}{2} m_i (\rho_i \omega)^2$$
$$= \frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i \rho_i{}^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

回転物体の運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2} I_z \omega^2$$

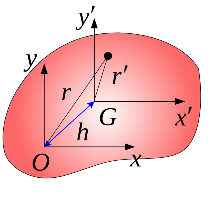


慣性モーメントの定理(1) 平行軸の定理

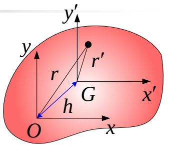
剛体の重心 G を通る軸の回りの慣性モーメントを I_G とし、その軸に平行で、重心から h だけ離れた軸の回りの慣性モーメントを I とすると、

$$I = I_G + Mh^2$$

(ただし M は剛体の質量)



慣性モーメントの定理(1) 証明



Oから見た重心の座標を(x_G, y_G)、質点iを(x_i, y_i)とする。また重心から見た質点iの座標を(x'_i, y'_i)とする。

$$x_i = x'_i + x_G, \quad y_i = y'_i + y_G$$

$$m_i({x_i}^2 + {y_i}^2) = m_i({x'_i}^2 + {y'_i}^2) + 2m_i(x_G x'_i + y_G y'_i) + m_i({x_G}^2 + {y_G}^2)$$

$$I = \sum_i m_i({x_i}^2 + {y_i}^2)$$

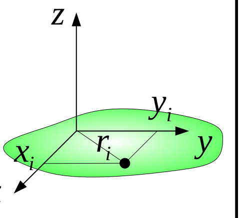
$$= \sum_i m_i({x'_i}^2 + {y'_i}^2) + 2x_G \sum_i m_i x'_i + 2y_G \sum_i m_i y'_i + h^2 \sum_i m_i$$

$$= I_G + Mh^2$$

慣性モーメントの定理(2) 平板における直交軸の定理

$x-y$平面に置かれた厚さが一様な薄い平板状の剛体の一点を通り、剛体面に垂直なz軸回りの慣性モーメントI_zは、同じ点を通るx, y軸に平行な軸回りの慣性モーメントI_x, I_yとの間に以下の関係がある。

$$I_z = I_x + I_y$$



慣性モーメントの定理(2) 証明

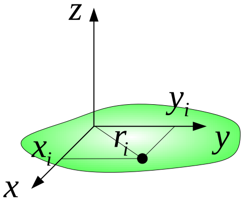
$$I_Z = \sum_i m_i {r_i}^2 = \sum_i m_i {x_i}^2 + \sum_i m_i {y_i}^2$$

剛体は薄いので、

$$I_x = \sum_i m_i {y_i}^2$$

$$I_y = \sum_i m_i {x_i}^2$$

よって$I_z = I_x + I_y$



連続体としての剛体の取扱い

質点系から連続体へ:重積分

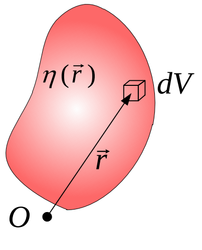
剛体を細かく切り刻み、微小体積dVを定義する。位置$\vec{r}$における密度を$\eta(\vec{r})$とおけば、

$$m_i \to \eta(\vec{r})dV$$

と対応が取れる。

これを用いて質点に対する和を積分に変換する。

$$\sum_i m_i \alpha_i \to \int \alpha(\vec{r})\eta(\vec{r})dV$$



連続体の全質量と重心

全質量:

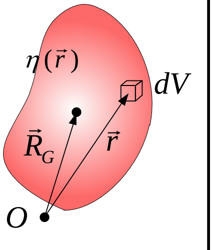
$$M = \sum_i m_i$$

$$\to \qquad M = \int \eta(\vec{r})dV$$

重心ベクトル:

$$\vec{R}_G = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec{r}_i$$

$$\to \qquad \vec{R}_G = \frac{1}{M}\int \vec{r}\,\eta(\vec{r})dV$$



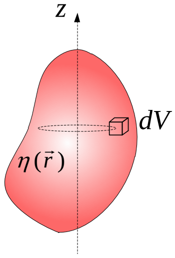
連続体の慣性モーメント

慣性モーメント

$$I_z = \sum_i m_i \rho_i^2$$

$$\to I_z = \int \eta(\vec{r}) \rho^2 dV$$

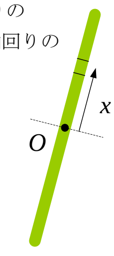
ただしここでのρは、
対象の軸から微小体積
までの距離。



慣性モーメントの計算例：棒

棒の重心は中点。棒の長さをl,長さあたりの
質量をηとし、重心を通って棒に垂直な軸回りの
慣性モーメントを求める。

$$I_G = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \eta dx = \left[\eta \frac{x^3}{3} \right]_{-l/2}^{l/2} = \frac{\eta l^3}{12}$$



$M = \eta l$を用いて、

$$I_G = \frac{Ml^2}{12}$$

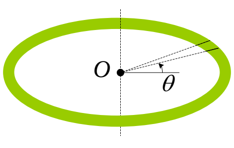
慣性モーメントの計算例：円環

半径aの円環の中心軸回りの慣性モーメントを求める。
長さあたりの質量をηとすると

$$I_G = \int_0^{2\pi} a^2 \eta a d\theta = \left[\eta a^3 \theta \right]_0^{2\pi} = 2\pi \eta a^3$$

$M = 2\pi a \eta$ を用いて、

$$I_G = Ma^2$$



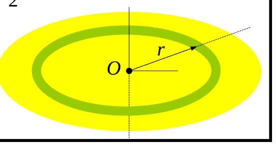
慣性モーメントの計算例：円板

半径aの円板の中心軸回りの慣性モーメントを求める。
円板の面積あたりの質量をσとし、半径rの位置に
幅drの細い円環を考える。この重さは$2\pi r \sigma dr$なので
慣性モーメントは$2\pi \sigma r^3 dr$。これを$0 \to a$まで積分して、

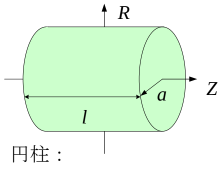
$$I_G = \int_0^a 2\pi \sigma r^3 dr = 2\pi \sigma \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^a = \frac{\pi \sigma a^4}{2}$$

$M = \pi a^2 \sigma$ を用いて、

$$I_G = \frac{1}{2} Ma^2$$



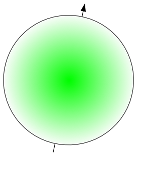
その他代表的な慣性モーメント：



円柱：

$$I_{GZ} = \frac{1}{2} Ma^2$$

$$I_{GR} = \frac{M}{4} a^2 + \frac{M}{12} l^2$$



球：半径をaとして

$$I_G = \frac{2}{5} Ma^2$$