物理学Ⅰ　12 回目補遺　　　　　担当：中野武雄（nakano@st.seikei.ac.jp）

球殻・球の慣性モーメント

　球殻の慣性モーメントは、ちょっと面倒だが球殻を円環の集合体とみなせば計算できる。いま xy 面に $y=\sqrt{a^2-x^2}\ (-a<x<a)$ なる円の軌跡を描き、これを x 軸回りに回転することを考えてみよう。このとき以下の関係があることを利用しよう。

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{y}$$

　この球殻のうち、位置 x にある、半径が y 、x 軸から見た幅が dx の円環を考えよう。この円環の質量は、傾斜の分だけ面積が大きくなることを考慮に入れると、

$$dM=\sigma\cdot 2\pi y\sqrt{(dy)^2+(dx)^2}=2\pi\sigma y\sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1}\ dx=2\pi\sigma y\sqrt{\left(-\frac{x}{y}\right)^2+1}\ dx$$

$$=2\pi\sigma y\frac{1}{y}\sqrt{x^2+y^2}\ dx=2\pi\sigma a\,dx$$

で与えられる。ただし σ は面密度である。よってこの円環の慣性モーメントは $dM\ y^2$ となる。球殻の慣性モーメントは、これをすべて積分すれば良いので、

$$I_G=\int_{-a}^{a}dM\ y^2=\int_{-a}^{a}2\pi\sigma a\,y^2\,dx=2\pi\sigma\,a\int_{-a}^{a}a^2-x^2\,dx$$

$$=2\pi\sigma\,a\left[a^2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a}=\frac{8}{3}\pi\sigma\,a^4=\frac{2}{3}(4\pi a^2\sigma)a^2=\frac{2}{3}Ma^2$$

と求まる。

　次に中身の詰まった球の慣性モーメントを、半径 r で厚み dr の球殻の集合体として考える。この球殻の重さは、体積密度を η とすると $dM=4\pi r^2 dr\,\eta$ で、慣性モーメントは上述のように与えられるから、結局球の慣性モーメントは

$$I_G=\int_0^a\frac{2}{3}dM\,r^2=\frac{2}{3}\int_0^a 4\pi r^2\,\eta\,r^2dr=\frac{8}{3}\pi\eta\int_0^a r^4dr=\frac{8}{3}\pi\eta\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a$$

$$=\frac{8}{15}\pi\eta\alpha^5=\frac{2}{5}\left(\frac{4}{3}\pi a^3\eta\right)a^2=\frac{2}{5}Ma^2$$

となる。

　別解として、3 次元球面極座標による積分をしても良い。体積素として $r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi$ が利用できるので、この部分の慣性モーメントへの寄与を $0\le r\le a, 0\le\theta\le\pi, 0\le\phi\le 2\pi$ で積分すると、

$$I_G=\int_0^a\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\eta r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi\cdot(r\sin\theta)^2=\eta\int_0^a r^4dr\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^\pi\sin^3\theta\,d\theta$$

$$=\eta\frac{a^5}{5}\cdot 2\pi\cdot\int_0^\pi(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta=\frac{2\pi\eta\,a^5}{5}\int_1^{-1}(1-t^2)(-dt)=\frac{2\pi\eta\,a^5}{5}\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1}=\frac{8}{15}\pi\eta\,a^5$$

となり、同じ結果を与える。なお最後は $t=\cos\theta$ による置換積分を用いた。