物理学 I（力学）13 回目：剛体の運動の具体例

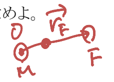
中野武雄

2012年7月3日

11回目課題の解答(1a)

フィギュアスケート（ペア）の男子選手（体重60kg）・女子選手（40kg）を、摩擦のない平面上を運動する2質点からなる質点系と考える。いずれもSI単位系の値で答えよ。

1. 両者が1m離れて手を繋いでいるとき、重心の位置を求めよ。



A: 男子選手の位置を原点に取ると、

$$\vec{r}_G = \frac{m_M \times 0 + m_F \vec{r}_F}{m_M + m_F} = \frac{40[\mathrm{kg}]}{60[\mathrm{kg}] + 40[\mathrm{kg}]} \vec{r}_F = 0.4\vec{r}_F$$

よって男子選手から女子選手へ向かう直線の、男子から0.40[m]の位置。

（なおこの位置は原点の選び方に依存しない）

11回目課題の解答(1b)

2. この状態で毎秒1回転しているとき、重心を原点とする全角運動量を求めよ。

A:

男女は重心を中心とする円運動をしている。

回転方向は同じはずなので、和を取れば良い。

速度$|\vec{v}| = r\omega$、位置ベクトルと速度ベクトルが

直交していることを用いて, $|\vec{L}| = |\vec{r} \times m\vec{v}| = mr^2\omega$

$$|\vec{L}_F| + |\vec{L}_M| = m_F r_F{}^2 \omega + m_M r_M{}^2 \omega = \left(m_F r_F{}^2 + m_M r_M{}^2\right)\omega$$

$$= \left\{40[\mathrm{kg}] \times (0.60[\mathrm{m}])^2 + 60[\mathrm{kg}] \times (0.40[\mathrm{m}])^2\right\} \times 2\pi \times 1[\mathrm{s}^{-1}]$$

$$= 150.80 \sim 1.5 \times 10^2 [\mathrm{kg\,m^2/s}]$$

11回目課題の解答 (1c)

3. 両者の距離が1.5mに離れると、毎秒何回転になるか。全角運動量は保存されるとせよ。

A:

重心は4 : 6 内分点だから、$r_F = 0.90[\mathrm{m}]$、$r_M = 0.60[\mathrm{m}]$。

$$|\vec{L}| = \left(m_F r_F{}^2 + m_M r_M{}^2\right)\omega$$ より、

$$\omega = \frac{150.80[\mathrm{kg\,m^2/s}]}{40[\mathrm{kg}] \times (0.90[\mathrm{m}])^2 + 60[\mathrm{kg}] \times (0.60[\mathrm{m}])^2}$$

$$= 2.793[\mathrm{rad/s^{-1}}]$$

毎秒の回転数は$\omega / 2\pi = 0.444... \sim 0.44[\mathrm{s}^{-1}]$

11回目課題の解答(1参考)

この2質点からなる系の重心 回りの慣性モーメント は

$$I = \sum_{i=1}^{2} m_i r_i{}^2$$

互いの距離が 1.5倍になると、重心からの距離も

それぞれ 1.5 倍になる。よってこの とき $I_{1.5} = (1.5)^2 I_{1.0}$

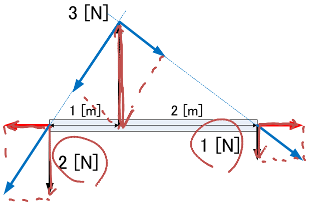
角運動量が保存される 状況では $I_{1.0}\omega_{1.0} = I_{1.5}\omega_{1.5}$ より

$$\frac{\omega_{1.5}}{\omega_{1.0}} = \frac{I_{1.0}}{I_{1.5}} = \frac{1}{1.5^2}$$

よって回転数は $1[\mathrm{s}^{-1}] \div 2.25 = 0.44[\mathrm{s}^{-1}]$

11回目課題の解答(2a)

棒に作用している以下の3力が、合力も合成トルクもいずれも0であることを作図で示せ。



10回目課題の解答(2b)

棒に作用している以下の3力が、合力も合成トルクもいずれも0であることを、適当な座標系を導入して式で示せ。

$N_z = r_x K_y - r_y K_x$

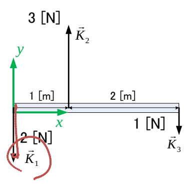
図のように原点とxy座標系を取る。

$$\vec r_1 = (0,0),\quad \vec K_1 = (0,-2)[\mathrm{N}]$$
$$\vec r_2 = (1,0)[\mathrm{m}],\quad \vec K_2 = (0,\ 3)[\mathrm{N}]$$
$$\vec r_3 = (3,0)[\mathrm{m}],\quad \vec K_3 = (0,-1)[\mathrm{N}]$$

だから $\vec K_1 + \vec K_2 + \vec K_3 = 0$

また $\sum_{i=1}^{3} \vec r_i \times \vec K_i = 0 + 3[\mathrm{Nm}] - 3[\mathrm{Nm}] = 0$

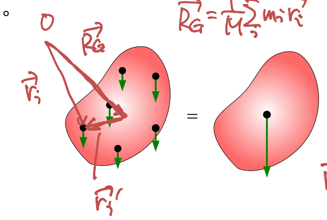
よって合力・合成トルクともに0。



11回目課題 (3)

質点系が一様な重力下にあるとき、すなわち質量 m_i、座標 $\vec r_i$ の質点それぞれに $m_i\vec g$ なる外力が作用している場合について、この質点系の重心回りの全トルクが0であることを示せ。

$\vec R_G = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec r_i$



$N' = \sum_i \vec r_i' \times m_i \vec g$

$\vec r_i' + \vec R_G = \vec r_i$

$\vec r_i' = \vec r_i - \vec R_G$

11回目課題の解答(3)

質点系を構成する質量 m_i の質点が $\vec r_i$ にあるとする。

重心ベクトル $\vec R_G$ と、重心からの相対位置ベクトル $\vec r_i{}'$ は

$$\vec R_G = \frac{1}{M}\sum_i m_i \vec r_i,\qquad \vec r_i{}' = \vec r_i - \vec R_G$$

ただし $M = \sum_i m_i$。このとき

$$\sum_i m_i \vec r_i{}' = \sum_i m_i\left(\vec r_i - \vec R_G\right) = \overset{M\vec R_G}{\sum_i m_i \vec r_i} - \left(\overset{M}{\sum_i m_i}\right)\vec R_G = 0$$

これを用いて重心回りの全トルクは

$$N'_{Tot} = \sum_i \vec r_i{}' \times m_i \vec g = \sum_i m_i \vec r_i{}' \times \vec g = \left(\sum_i m_i \vec r_i{}'\right) \times \vec g = 0$$

今日の内容

- 前回のおさらい
  - 剛体の自由度
  - 剛体の運動の式
  - 慣性モーメント
  - 連続体の慣性モーメント
- 具体的な剛体の運動
  - ちょっとだけ前回の補足(重心・回転半径)
  - 実体振り子
  - 斜面を転がり落ちる円柱
  - 自動車エンジンのトルクと加速度

剛体：特殊な質点系

- 各質点間の距離が常に一定に保たれている質点系
- 剛体の状態の表現に必要な変数の数は：
  - 3次元では 6 個　　　　→自由度6
  - 平面運動(2次元)では 3 個→自由度3

剛体の運動の式

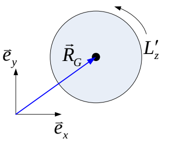
- 自由度6を、以下のように分配するのが一般的
  - 重心の xyz 座標(→自由度3)
  - x軸、y軸、z軸に平行な軸回りの回転角(→自由度3)

$$M\frac{d^2\vec R_G}{dt^2} = \sum_j \vec K_j$$

$$\frac{d\vec L}{dt} = \sum_j \vec N_j \left(= \sum_j \vec r_j \times \vec K_j \right)$$

$$\left(\text{あるいは} \frac{d\vec L'}{dt} = \sum_j \vec N_j' = \sum_j \vec r_j' \times \vec K_j \right)$$

剛体の平面運動の式



$$M\frac{d^2x_G}{dt^2}=\sum_j X_j$$

$$M\frac{d^2y_G}{dt^2}=\sum_j Y_j \quad \left(ただし\vec{K}_j=X_j\vec{e}_x+Y_j\vec{e}_y\right)$$

$$\frac{dL'_z}{dt}\left(=I\frac{d\omega}{dt}\right)=\sum_j\left(x'_jY_j-y'_jX_j\right)$$

慣性モーメント

「z 軸回りの慣性モーメン　ト」を

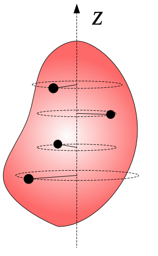
$$I_z\equiv\sum_i m_i\rho_i^{\,2}$$

と定義すると角運動量　は：

$$L_z=I_z\omega$$

回転による「重心回り　の」運動エネルギー：

$$K'=\frac{1}{2}I\omega^2$$



連続体の全質量と重心

全質量：

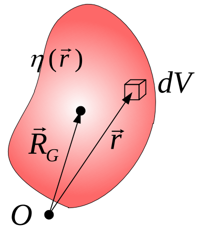
$$M=\sum_i m_i$$

$$\rightarrow \quad M=\int\eta(\vec{r})dV$$

重心ベクトル：

$$\vec{R}_G=\frac{1}{M}\sum_i m_i\vec{r}_i$$

$$\rightarrow \quad \vec{R}_G=\frac{1}{M}\int\vec{r}\,\eta(\vec{r})dV$$



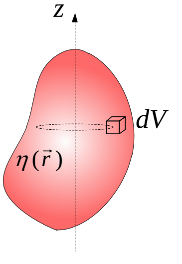
連続体の慣性モーメント

慣性モーメント

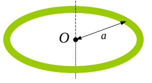
$$I_z=\sum_i m_i\rho_i^{\,2}$$

$$\rightarrow I_z=\int\eta(\vec{r})\rho^2dV$$

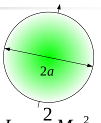
ただしここでの ρは、
対象の軸から微小体積
までの距離。



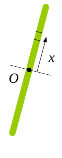
慣性モーメントの例



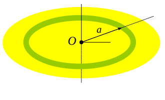
$$I_G=Ma^2$$



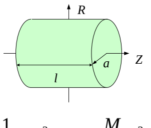
$$I_G=\frac{2}{5}Ma^2$$



$$I_G=\frac{Ml^2}{12}$$



$$I_G=\frac{1}{2}Ma^2$$



$$I_{GZ}=\frac{1}{2}Ma^2, I_{GR}=\frac{M}{4}a^2+\frac{M}{12}l^2$$

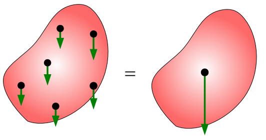
剛体：今日使う定理・補遺

剛体に加わる重力の合成

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{g} = M\vec{g}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{g} = MR_G \times \vec{g} = R_G \times M\vec{g}$$

- 重力下におかれた質点系(剛体)では:
  - 重心に全質量分の重力がかかったと考えてよい
  - 重力による重心回りのトルクは0

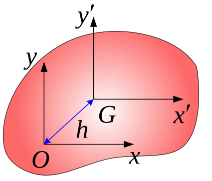


平行軸の定理

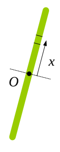
剛体の重心Gを通る軸の回りの慣性モーメントをI_Gとし、その軸に平行で、重心から h だけ離れた軸の回りの慣性モーメントをIとすると、

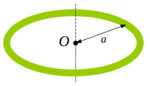
$$I = I_G + Mh^2$$

(ただしMは剛体の質量)

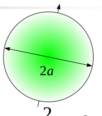


慣性モーメントの例

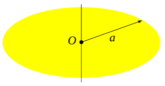


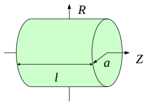


$I_G = Ma^2$



$I_G = \frac{2}{5} Ma^2$





$I_G = \frac{Ml^2}{12}$

$I_G = \frac{1}{2} Ma^2$

$I_{GZ} = \frac{1}{2} Ma^2, I_{GR} = \frac{M}{4} a^2 + \frac{M}{12} l^2$

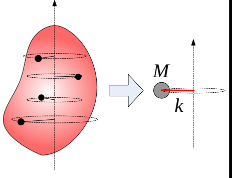
補遺:回転半径

$$I = \sum_k m_i r_i^{\ 2}$$

ここで

$$I = Mk^2 \quad \left(ただし M = \sum_k m_i \right)$$

となるように定義したkを
「回転半径」と呼ぶ。



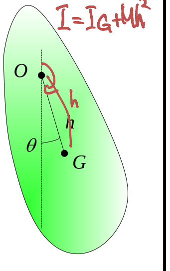
例 :円板$\left(I = \frac{1}{2} Ma^2 \right)$なら$k = \frac{1}{\sqrt{2}} a$、球$\left(I = \frac{2}{5} Ma^2 \right)$なら$k = \sqrt{\frac{2}{5}} a$

具体的な剛体の運動(1)
実体振り子

実体振り子

- 剛体の重心以外に回転軸を固定した振子
- 自然の位置は OG が鉛直線上にある場合
- 角度をずらすと振動をする
  - 周期は?
  - O の位置でどう変わる?

$I=I_G+Mh^2$



運動方程式

$I\frac{d\omega}{dt}=\vec{N}$　$\omega=\frac{d\theta}{dt}$

O回りのトルク方程式は（微小振動なら）

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=\vec{R}_G\times M\vec{g}=-Mgh\sin\theta\sim-Mgh\theta$$

単振り子の運動方程式

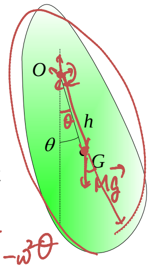
$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta\sim-mg\theta$$

と比較して、振動の解と角振動数・周期は

$$\theta=A\cos(\omega t+\phi)$$

$$\omega=\sqrt{\frac{Mgh}{I}}\Rightarrow T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}}$$

$\frac{d^2\theta}{dt^2}\to-\omega^2\theta$



相当単振り子の長さ

$$\omega=\sqrt{\frac{Mgh}{I}},\quad T=2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgh}}$$

を単振り子の

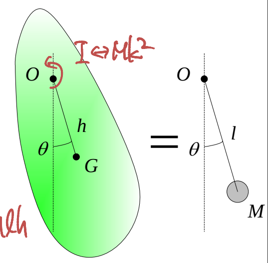
$$\omega_{sp}=\sqrt{\frac{g}{l}},\quad T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

と比較し、実体振り子に対して

$$l\equiv\frac{I}{Mh}\left(=\frac{k^2}{h}\right)$$

を相当単振り子の長さという。

$I\Leftrightarrow Mk^2$　$I=Mlh$



参考：「振動の中心」と振動周期

直線OG上のOからlの位置にO'を取り、
$O'G$の長さを$h'(=l-h)$と置く。
平行軸の定理から

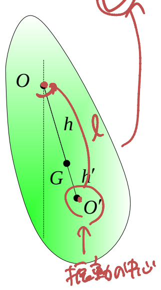
$$I=I_G+Mh^2$$
$$I'=I_G+Mh'^2 \quad (h+h')(h-h')$$

辺々引いて

$$I-I'=M(h^2-h'^2)=Ml(h-h')$$

$$\Rightarrow I'=Mlh',\quad l'\equiv\frac{h'}{MI'}=l$$

$I=Mlh$



参考：周期を最小にする軸の位置

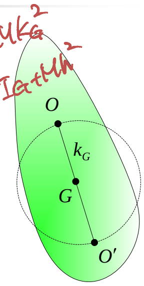
$I_G=Mk_G^2$　$I=I_G+Mh^2$

重心回りの角運動量に対応する
回転半径をk_Gとすると、

$$l=\frac{I}{Mh}=\frac{Mk_G^2+Mh^2}{Mh}=\frac{k_G^2+h^2}{h}$$
$$=\frac{(k_G-h)^2}{h}+2k_G$$

よって$h=k_G$のときlは最小値$2k_G$を取る。

このとき周期$T=2\pi\sqrt{\frac{2k_G}{g}}$も最短となる。



具体的な剛体の運動(2) 坂道を転がり降りる円板

復習：斜面の滑降（運動方程式版）

$ma_x=mg\sin\theta$、$ma_y=0$

$t=0$での物体の位置を原点、初速度0とすると、

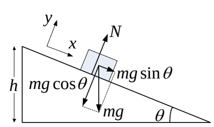
$$\frac{d^2x}{dt^2}=g\sin\theta\ \Rightarrow v=g\sin\theta\, t\Rightarrow x=\frac{1}{2}g\sin\theta\, t^2$$

yは時間によらず0で一定。　$\frac{1}{2}g\sin\theta\, t_0^2=\frac{h}{\sin\theta}$

滑り降りた距離は$\frac{h}{\sin\theta}$なので、

$t_0=\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}}$　よって$v=\sqrt{2gh}$

$v=g\sin\theta\cdot\frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

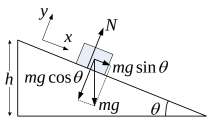


復習：斜面の滑降（エネルギー保存版）

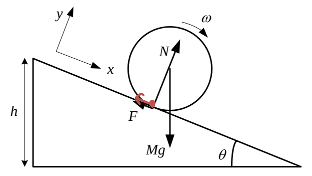
初期位置における位置エネルギーはmgh。
垂直抗力は束縛力なので仕事をしない。
よって力学的エネルギーの保存則から、

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

よって$v = \sqrt{2gh}$

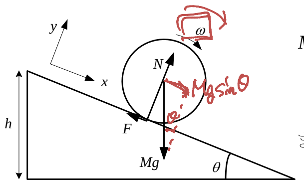


坂道を転がり降りる円板



- 滑りなく坂道を転がり降りる円板の運動
  - 円板の質量：M
  - 円板の半径：a
- 円板に働く力
  - 重力（重心を通る）
  - 垂直抗力（接点を通る）
  - 摩擦力（接点を通る）

運動方程式



$$M\frac{d^2x_G}{dt^2} = \sum_j X_j = Mg\sin\theta - F$$

$$M\frac{d^2y_G}{dt^2} = \sum_j Y_j = N - Mg\cos\theta$$

$$I\frac{d\omega}{dt} = \sum_j N_j = aF$$

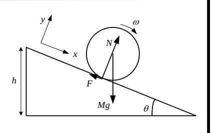
また束縛条件として

$$\frac{dx_G}{dt} = a\omega$$

$$\left(\Rightarrow \frac{d^2x_G}{dt^2} = a\frac{d\omega}{dt}\right)$$

運動方程式（続）

$\frac{d^2x_G}{dt^2} = a\frac{d\omega}{dt}$



$$M\frac{d^2x_G}{dt^2} = Mg\sin\theta - F$$

$$I\frac{d\omega}{dt} = aF$$

第2式$\Rightarrow \frac{1}{2}Ma^2 \cdot \frac{1}{a}\frac{d^2x_G}{dt^2} = aF \Rightarrow \frac{1}{2}M\frac{d^2x_G}{dt^2} = F$

Fを消去すると

$$\frac{3}{2}M\frac{d^2x_G}{dt^2} = Mg\sin\theta \Rightarrow \frac{d^2x_G}{dt^2} = \frac{2}{3}g\sin\theta$$

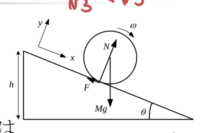
運動方程式を解く

$\frac{2}{\sqrt{3}} : \sqrt{2}$

$\sqrt{\frac{4}{3}} < \sqrt{\frac{6}{3}}$

$t=0$で$x_G = 0, \frac{dx_G}{dt} = 0$とすると、

$$\frac{d^2x_G}{dt^2} = \frac{2}{3}g\sin\theta \Rightarrow x_G(t) = \frac{1}{3}g\sin\theta\, t^2$$



よって滑り降りるのにかかる時間をt_Dは

$$\frac{1}{3}g\sin\theta\, t_D{}^2 = \frac{h}{\sin\theta} \quad \Rightarrow t_D = \sqrt{\frac{3h}{g\sin^2\theta}}$$

滑落のとき $v=\sqrt{2gh}$

よって斜面下端において$\begin{cases} 重心速度 \quad v_G = \frac{2}{3}g\sin\theta\, t_D = 2\sqrt{\frac{gh}{3}} \\ 角速度 \quad \omega = \frac{1}{a}\frac{dx_G}{dt} = \frac{v_G}{a} = \frac{2}{a}\sqrt{\frac{gh}{3}} \end{cases}$

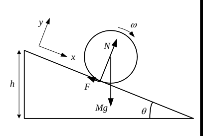
参考：エネルギー保存則

質点系の全運動エネルギーは、
(重心の運動エネルギー)＋(重心回りの運動エネルギー)
であった。

$$K = \frac{1}{2}Mv_G{}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

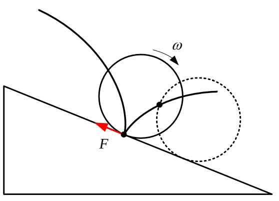
$$= \frac{1}{2}M\left(2\sqrt{\frac{gh}{3}}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Ma^2\right)\left(\frac{2}{a}\sqrt{\frac{gh}{3}}\right)^2$$

$$= \frac{2}{3}Mgh + \frac{1}{3}Mgh = Mgh$$



余談：摩擦力による仕事は？

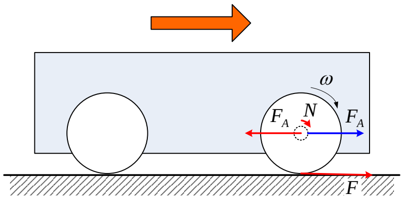
- 円板の外周に置いた「質点」は、サイクロイドと呼ばれる運動をする。
- これは斜面との接触点では、斜面に垂直な方向に運動する。
- よって摩擦力と接触点での質点の運動は直交
  →内積がゼロなので
  仕事をしない



具体的な剛体の運動(3)
自動車のトルクと加速度

自動車のトルクと加速度

- 前輪・後輪に同じトルク N
- 車体質量 M
- 車輪の質量 m, 半径 a



運動方程式

車体：

$$M\frac{dV}{dt} = 2F_A$$

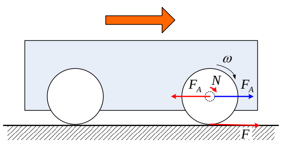
車輪の並進・回転運動：

$$m\frac{dV}{dt} = F - F_A$$

$$I\frac{d\omega}{dt} = N - aF$$

束縛条件：

$$V = a\omega$$



$I = \frac{1}{2}ma^2$ $\quad \frac{I}{a^2} = \frac{m}{2}$

連立させてF, F_A, ωを消去すると：

$$\left(m + \frac{M}{2} + \frac{I}{a^2}\right)\frac{dV}{dt} = \frac{N}{a}$$

実際の車での例

$$\frac{dV}{dt} = \frac{N}{a\left(\frac{3}{2}m + \frac{M}{2}\right)} = \frac{2N}{a(3m+M)}$$

$$\sim \frac{100[\mathrm{Nm}]\times 8}{0.3[\mathrm{m}]\times 1100[\mathrm{kg}]} = 2.4[\mathrm{m/s^2}]$$

- 例：日産ティーダラティオ
  - 最大トルク：148 [Nm] (@4400 rpm)
  - ギヤ比：5.473×(2.561~0.427)
  - 車重：1100 [kg]
  - タイヤ半径：0.3 [m]

余談：ギヤ比とトルク

ギヤ比：2つの歯車の外周の比→半径の比

2つの歯車を作用させると作用反作用の法則が成立するから、$F_{12} = -F_{21}$

このとき $|N_2| = r_2|F_{21}| = \frac{r_2}{r_1}r_1|F_{12}| = \frac{r_2}{r_1}|N_1|$

よってギア比が大きいとトルクは増大
(ただし回転数は落ちる)