物理学 I（力学）13 回目：剛体の運動の具体例

中野武雄

2012年7月3日

今日の内容

- 前回のおさらい
  - 剛体の自由度
  - 剛体の運動の式
  - 慣性モーメント
  - 連続体の慣性モーメント
- 具体的な剛体の運動
  - ちょっとだけ前回の補足（重心・回転半径）
  - 実体振り子
  - 斜面を転がり落ちる円柱
  - 自動車エンジンのトルクと加速度

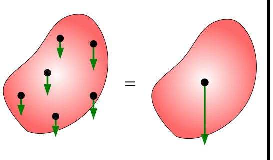
剛体：今日使う定理・補遺

剛体に加わる重力の合成

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{g} = M\vec{g}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \times \vec{g} = MR_G \times \vec{g} = R_G \times M\vec{g}$$

- 重力下におかれた質点系（剛体）では：
  - 重心に全質量分の重力がかかったと考えてよい
  - 重力による重心回りのトルクは0

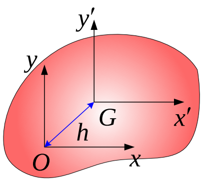


平行軸の定理

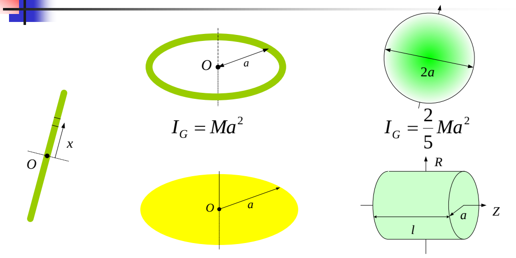
剛体の重心Gを通る軸の回りの慣性モーメントをI_Gとし、その軸に平行で、重心から h だけ離れた軸の回りの慣性モーメントをIとすると、

$$I = I_G + Mh^2$$

（ただしMは剛体の質量）



慣性モーメントの例



$I_G = Ma^2$　　$I_G = \frac{2}{5}Ma^2$

$I_G = \frac{Ml^2}{12}$　　$I_G = \frac{1}{2}Ma^2$　　$I_{GZ} = \frac{1}{2}Ma^2, I_{GR} = \frac{M}{4}a^2 + \frac{M}{12}l^2$

補遺：回転半径

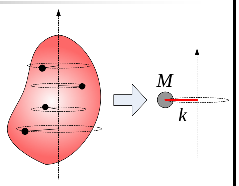
$$I = \sum_k m_i r_i^{\,2}$$

ここで

$$I = Mk^2 \qquad \left(ただし M = \sum_k m_i \right)$$

となるように定義したkを

「回転半径」と呼ぶ。

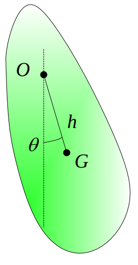


例 :円板$\left(I = \frac{1}{2} Ma^2 \right)$なら$k = \frac{1}{\sqrt{2}} a$、球$\left(I = \frac{2}{5} Ma^2 \right)$なら$k = \sqrt{\frac{2}{5}}\, a$

具体的な剛体の運動(1)
実体振り子

実体振り子

- 剛体の重心以外に
  回転軸を固定した振子
- 自然の位置は OG が鉛直線上にある場合
- 角度をずらすと振動をする
  - 周期は？
  - O の位置でどう変わる？



運動方程式

O回りのトルク方程式は（微小振動なら）

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = \vec{R}_G \times Mg = -Mgh \sin\theta \sim -Mgh\theta$$

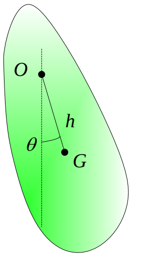
単振り子の運動方程式

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin\theta \sim -mg\theta$$

と比較して、振動の解と角振動数・周期は

$$\theta = A\cos(\omega t + \phi)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgh}{I}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgh}}$$



相当単振り子の長さ

$$\omega = \sqrt{\frac{Mgh}{I}}, \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgh}}$$

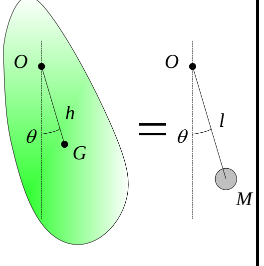
を単振り子の

$$\omega_{sp} = \sqrt{\frac{g}{l}}, \qquad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

と比較し、実体振り子に対して

$$l \equiv \frac{I}{Mh} \left(= \frac{k^2}{h} \right)$$

を相当単振り子の長さという。



参考：「振動の中心」と振動周期

直線OG上のOからlの位置にO'を取り、

$O'G$の長さを$h'(=l-h)$と置く。

平行軸の定理から

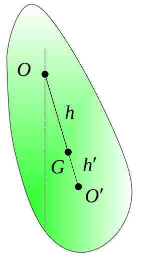
$$I = I_G + Mh^2$$

$$I' = I_G + Mh'^2$$

辺々引いて

$$I - I' = M(h^2 - h'^2) = Ml(h - h')$$

$$\Rightarrow \quad I' = Mlh', \quad l' \equiv \frac{h'}{MI'} = l$$



参考：周期を最小にする軸の位置

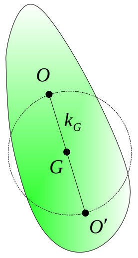
重心回りの角運動量に対応する回転半径をk_Gとすると、

$$l = \frac{I}{Mh} = \frac{Mk_G{}^2 + Mh^2}{Mh} = \frac{k_G{}^2 + h^2}{h}$$

$$= \frac{(k_G - h)^2}{h} + 2k_G$$

よって$h = k_G$のときlは最小値$2k_G$を取る。

このとき周期$T = 2\pi\sqrt{\frac{2k_G}{g}}$も最短となる。



具体的な剛体の運動(2) 坂道を転がり降りる円板

復習：斜面の滑降（運動方程式版）

$$ma_x = mg\sin\theta、 ma_y = 0$$

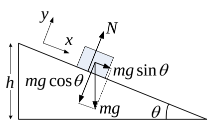
$t = 0$での物体の位置を原点、初速度0とすると、

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g\sin\theta \Rightarrow v = g\sin\theta\, t \Rightarrow x = \frac{1}{2}g\sin\theta\, t^2$$

yは時間によらず0で一定。

滑り降りた距離は$\frac{h}{\sin\theta}$なので、

$$t = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{2h}{g}} \quad よって v = \sqrt{2gh}$$



復習：斜面の滑降（エネルギー保存版）

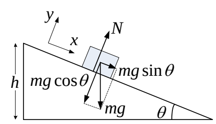
初期位置における位置エネルギーはmgh。

垂直抗力は束縛力なので仕事をしない。

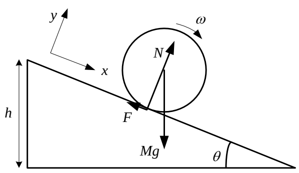
よって力学的エネルギーの保存則から、

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

よって$v = \sqrt{2gh}$

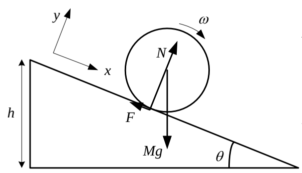


坂道を転がり降りる円板



- 滑りなく坂道を転がり降りる円板の運動
  - 円板の質量：M
  - 円板の半径：a
- 円板に働く力
  - 重力（重心を通る）
  - 垂直抗力（接点を通る）
  - 摩擦力（接点を通る）

運動方程式



$$M\frac{d^2x_G}{dt^2} = \sum_j X_j = Mg\sin\theta - F$$

$$M\frac{d^2y_G}{dt^2} = \sum_j Y_j = N - Mg\cos\theta$$

$$-I\frac{d\omega}{dt} = \sum_j N_j = -aF$$

また束縛条件として

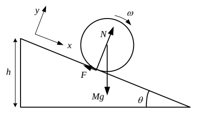
$$\frac{dx_G}{dt} = a\omega$$

$$\left(\Rightarrow \frac{d^2x_G}{dt^2} = a\frac{d\omega}{dt}\right)$$

運動方程式(続)

$$M\frac{d^2x_G}{dt^2}=Mg\sin\theta-F$$

$$I\frac{d\omega}{dt}=aF$$



$$\text{第2式}\Rightarrow\frac{1}{2}Ma^2\cdot\frac{1}{a}\frac{d^2x_G}{dt^2}=aF\Rightarrow\frac{1}{2}M\frac{d^2x_G}{dt^2}=F$$

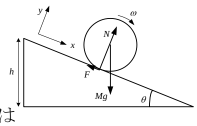
Fを消去すると

$$\frac{3}{2}M\frac{d^2x_G}{dt^2}=Mg\sin\theta\Rightarrow\frac{d^2x_G}{dt^2}=\frac{2}{3}g\sin\theta$$

運動方程式を解く

$t=0$ で $x_G=0,\frac{dx_G}{dt}=0$とすると、

$$\frac{d^2x_G}{dt^2}=\frac{2}{3}g\sin\theta\Rightarrow x_G(t)=\frac{1}{3}g\sin\theta\, t^2$$



よって滑り降りるのにかかる時間をt_Dは

$$\frac{1}{3}g\sin\theta\, t_D{}^2=\frac{h}{\sin\theta}\qquad\Rightarrow t_D=\sqrt{\frac{3h}{g\sin^2\theta}}$$

よって斜面下端において

$$\begin{cases}\text{重心速度}\ v_G=\frac{2}{3}g\sin\theta\, t_D=2\sqrt{\frac{gh}{3}}\\ \text{角速度}\quad \omega=\frac{1}{a}\frac{dx_G}{dt}=\frac{v_G}{a}=\frac{2}{a}\sqrt{\frac{gh}{3}}\end{cases}$$

参考:エネルギー保存則

質点系の全運動エネルギーは、

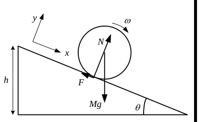
(重心の運動エネルギー)+(重心回りの運動エネルギー)

であった。

$$K=\frac{1}{2}Mv_G{}^2+\frac{1}{2}I\omega^2$$

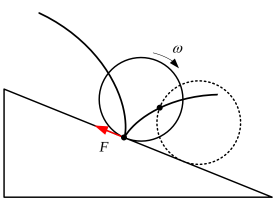
$$=\frac{1}{2}M\left(2\sqrt{\frac{gh}{3}}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}Ma^2\right)\left(\frac{2}{a}\sqrt{\frac{gh}{3}}\right)^2$$

$$=\frac{2}{3}Mgh+\frac{1}{3}Mgh=Mgh$$



余談:摩擦力による仕事は?

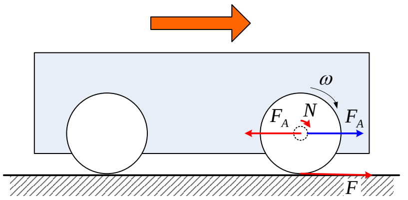
- 円板の外周に置いた「質点」は、サイクロイドと呼ばれる運動をする。
- これは斜面との接触点では、斜面に垂直な方向に運動する。
- よって摩擦力と接触点での質点の運動は直交→内積がゼロなので 仕事をしない



具体的な剛体の運動(3) 自動車のトルクと加速度

自動車のトルクと加速度

- 前輪・後輪に同じトルク N
- 車体質量 M
- 車輪の質量 m, 半径 a



運動方程式

車体：

$$M\frac{dV}{dt}=2F_A$$

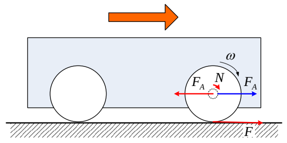
車輪の並進・回転運動：

$$m\frac{dV}{dt}=F-F_A$$

$$-I\frac{d\omega}{dt}=-N+aF$$

束縛条件：

$$V=a\omega$$



連立させてF, F_A, ωを消去すると：

$$\left(m+\frac{M}{2}+\frac{I}{a^2}\right)\frac{dV}{dt}=\frac{N}{a}$$

実際の車での例

$$\frac{dV}{dt}=\frac{N}{a\left(\frac{3}{2}m+\frac{M}{2}\right)}=\frac{2N}{a(3m+M)}$$

$$\sim\frac{100[\mathrm{Nm}]\times 8}{0.3[\mathrm{m}]\times 1100[\mathrm{kg}]}=2.4[\mathrm{m/s^2}]$$

- 例: 日産ティーダラティオ
  - 最大トルク: 148 [Nm] (@4400 rpm)
  - ギヤ比: 5.473 × (2.561~0.427)
  - 車重: 1100 [kg]
  - タイヤ半径: 0.3 [m]

余談: ギヤ比とトルク

ギヤ比:2つの歯車の外周の比→半径の比

2つの歯車を作用させると作用反作用の法則が成立するから、$F_{12}=-F_{21}$

このとき $|N_2|=r_2|F_{21}|=\frac{r_2}{r_1}r_1|F_{12}|=\frac{r_2}{r_1}|N_1|$

よってギア比が大きいとトルクは増大

(ただし回転数は落ちる)