物理学 I（力学）14 回目：万有引力＋期末試験について

中野武雄

2012年7月10日

今日の内容

- 前回のおさらい：剛体の運動の具体例
  - 実体振り子
  - 斜面を転がり降りる運動
- 万有引力
- 質問の多かった共通問題集問題の解説

12回目課題の解答(1)

Q: 以下の物体の慣性モーメントを計算せよ
 a) 野球の硬球－質量145g、直径7.4cmの剛体球
 b) 質量145g、直径7.4cmの蓋・底のない円筒

A:

$$I_{Ball} = \frac{2}{5}Ma^2$$

$$= \frac{2}{5}\times 0.145[\mathrm{kg}]\times\left(\frac{7.4\times10^{-2}[\mathrm{m}]}{2}\right)^2 = 7.9\times10^{-5}[\mathrm{kg\,m^2}]$$

$$I_{Caddy} = Ma^2$$

$$= 0.145[\mathrm{kg}]\times\left(\frac{7.4\times10^{-2}[\mathrm{m}]}{2}\right)^2 = 1.99\times10^{-4}[\mathrm{kg\,m^2}]$$

12回目課題の解答(2a)

Q: 直径10 mm、長さ 14 mmの円筒形をした鉛（密度11.3 g/cm³）の弾丸が、銃身を 0.10秒で通過し、射出時に毎分 5.0×10⁴回転の角速度を得たとする。
 a) 弾丸の回転軸まわりの慣性モーメントを計算せよ。

A:

まず弾丸の密度ηより質量Mと円筒の対称軸回りの慣性モーメントIを求める。直径d, 長さlとして

$$M = \eta\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 l,\quad I = \frac{1}{2}M\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\eta\pi}{2}\left(\frac{d}{2}\right)^4 l$$

$$I = \frac{11.3[\mathrm{g/cm^3}]\times\pi}{2}\times\left(\frac{1.0[\mathrm{cm}]}{2}\right)^4\times 1.4[\mathrm{cm}] = 1.553[\mathrm{g\,cm^2}]\ \times\frac{(\mathrm{kg})}{1000\mathrm{g}}\times\left(\frac{(\mathrm{m})}{100\mathrm{cm}}\right)^2$$

$$= 1.6\times10^{-7}[\mathrm{kg\,m^2}]$$

12回目課題の解答(2b)

Q: b) 銃身から射出されたときの鉛の弾丸の重心回りの角運動量を求めよ。

A:

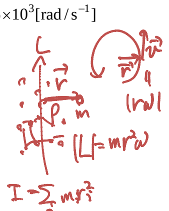
$$角速度\ \omega = 2\pi\times5.0\times10^4[\mathrm{min^{-1}}]\times\frac{1[\mathrm{min}]}{60[\mathrm{s}]} = 5.236\times10^3[\mathrm{rad/s^{-1}}]$$

$$|\vec{L}| = I\omega$$

$$= 1.553\times10^{-7}[\mathrm{kg\,m^2}]\times5.236\times10^3[\mathrm{rad/s}]$$

$$= 8.13\times10^{-4}[\mathrm{kg\,m^2/s}]$$

$L = I\omega$



$I = \sum_i m r_i^2$

12回目課題の解答(2c)

Q: c) 通過中には一定のトルクが与えられたと仮定し、そのトルクの大きさを求めよ。

A:

トルク方程式

$$\frac{dL}{dt} = N$$

を、$t = 0$で$L = 0$として解けば

$$L = Nt$$

よって

$$N = \frac{L}{t} = \frac{8.13\times10^{-4}[\mathrm{kg\,m^2/s}]}{0.10[\mathrm{s}]} = 8.13\times10^{-3}[\mathrm{Nm}]$$

$[N] = \mathrm{kg\,m/s^2}$

$\mathrm{kg\,m^2/s^2} \rightarrow \mathrm{Nm}$

13回目課題の解答(1)

Q: 半径1.0 mの一様な厚さの円板の、中心から0.5 mのところに穴を開けてピンで固定した。この実体振子の微小角振動における振動周期は何sか。g=9.8 m/s²とせよ。

A: 半径Rとすると、この円板の重心回りの慣性モーメント $I_G = \frac{1}{2}MR^2$。平行軸の定理により、ピン回りの角運動量

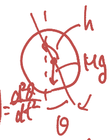
$$I_P = I_G + Mh^2 = \frac{1}{2}MR^2 + M\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}MR^2$$

13回目課題の解答(1続)

Q: 半径1.0 mの一様な厚さの円板の、中心から0.5 mのところに穴を開けてピンで固定した。この実体振子の微小角振動における振動周期は何sか。g=9.8 m/s²とせよ。

A:
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_P}{Mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{3}{4}MR^2\frac{2}{MgR}} = 2\pi\sqrt{\frac{3R}{2g}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{3\times1.0[\mathrm{m}]}{2\times9.8[\mathrm{m/s^2}]}} = 2.46[\mathrm{s}]$$



$$I_P\frac{d^2\theta}{dt^2} = -Mgh\theta$$

$$I_P\boxed{\frac{d\omega}{dt}} = N = -Mgh\sin\theta$$

13回目課題の解答(2)

Q: g=9.8 m/s²の重力下で、半径10cmの円板を傾斜角が30度の斜面に沿って転がした。すべりは無かった。坂の高さ(講義中の h)は 30 cm であった。
(a)円板が転がりおちたときの重心の並進速度を計算せよ。

A:
$$v_G = 2\sqrt{\frac{gh}{3}} = 2\sqrt{\frac{9.8[\mathrm{m/s^2}]\times0.30[\mathrm{m}]}{3}} = 1.97[\mathrm{m/s}]$$

13回目課題の解答(2続)

Q: g=9.8 m/s²の重力下で、半径10cmの円板を傾斜角が30度の斜面に沿って転がした。すべりは無かった。坂の高さ(講義中の h)は 30 cm であった。
(b)円板を中空の円筒に変えた場合の速度を計算せよ。
(c) 中身が詰まった球に変えた場合の速度を計算せよ。

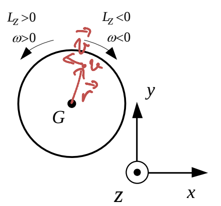
…?

補遺:平面運動のトルク方程式の正負

- 普通に xy 軸を取ると、z 軸は裏から表
- 反時計回りだと重心回りの角運動量の z 成分 $L_z>0$、よって $L_z=I\omega$ より $\omega>0$ と考えるのが通常。

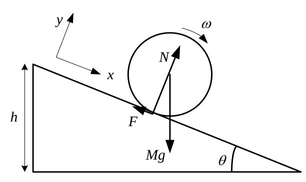
→ 反時計回りに回転を速めるトルクは正。

- 時計回りはいずれも負。



(…まあ自分で正負を把握していれば ok、ではある)

転がりの運動方程式



$$M\frac{d^2x_G}{dt^2} = \sum_j X_j = Mg\sin\theta - F$$

$$M\frac{d^2y_G}{dt^2} = \sum_j Y_j = N - Mg\cos\theta$$

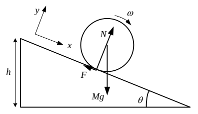
$$I\frac{d\omega}{dt} = \sum_j N_j = aF$$

また束縛条件として

$$\frac{dx_G}{dt} = a\omega$$

(教科書の例と同じ。この場合は時計回りにωの正の向きをとっています)

運動方程式の解



$$M\frac{d^2x_G}{dt^2} = Mg\sin\theta - F$$

$a\omega = \frac{dx_G}{dt}$ より $a\frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2x_G}{dt^2}$ なので

$$I\frac{d\omega}{dt} = aF \Rightarrow I\frac{1}{a}\frac{d^2x_G}{dt^2} = aF \Rightarrow \frac{I}{a^2}\frac{d^2x_G}{dt^2} = F$$

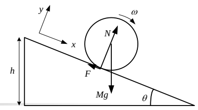
Fを消去すると

$$\left(M + \frac{I}{a^2}\right)\frac{d^2x_G}{dt^2} = Mg\sin\theta$$

円筒、$I = Ma^2 \to \frac{d^2x_G}{dt^2} = \frac{1}{2}g\sin\theta$

球、$I = \frac{2}{5}Ma^2 \to \frac{d^2x_G}{dt^2} = \frac{5}{7}g\sin\theta$

中空円筒・球



$t = 0$ で $x_G = 0,\ v_G = 0$とすると

円筒：$\frac{d^2x_G}{dt^2} = \frac{1}{2}g\sin\theta \Rightarrow v_G = \frac{1}{2}g\sin\theta\, t,\quad x_G = \frac{1}{4}g\sin\theta\, t^2$

球：$\frac{d^2x_G}{dt^2} = \frac{5}{7}g\sin\theta \Rightarrow v_G = \frac{5}{7}g\sin\theta\, t,\quad x_G = \frac{5}{14}g\sin\theta\, t^2$

よって$h/\sin\theta$を転がり降りるのにかかる時間とそのときの速度は

円筒：$t = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{4h}{g}},\quad v_G = \sqrt{gh} = 1.71[\mathrm{m/s}]$

球：$t = \frac{1}{\sin\theta}\sqrt{\frac{14h}{5g}},\quad v_G = \sqrt{\frac{10}{7}gh} = 2.05[\mathrm{m/s}]$

別解

$v_G = a\omega$を利用して、

$$Mgh = \frac{1}{2}Mv_G{}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I}{a^2}\right)v_G{}^2$$

$$\Rightarrow v_G = \sqrt{\frac{2Mgh}{M + I/a^2}}$$

中空円筒 $\quad I = Ma^2 \Rightarrow v_G = \sqrt{gh}$

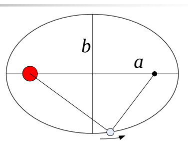
円柱 $\quad I = \frac{1}{2}Ma^2 \Rightarrow v_G = \sqrt{\frac{4}{3}gh}$

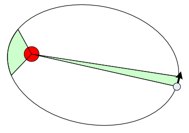
球 $\quad I = \frac{2}{5}Ma^2 \Rightarrow v_G = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$

万有引力

ケプラーの法則：観測事実

- 第1法則：
  惑星の軌道は、太陽を1つの焦点とする楕円である。
- 第2法則：
  惑星が太陽の周囲に描く面積速度は一定である。
- 第3法則：
  惑星の公転周期の2乗は軌道の長半径の3乗に比例する





$$T^2 = ka^3$$

余談：ケプラーの法則の発見

- ケプラーは、チコ・ブラーエによる観測データ（16世紀後半～17世紀前半）をもとに、火星の惑星軌道を計算していた。
- 当初は惑星軌道を円、太陽の位置は中心からずれたもの、と考えたが、ブラーエのデータとの間に8分（=8/60度）のずれが生じ、これを棄却した。
- 結果、楕円軌道の法則に行き着いた。

$\sin\left(\frac{8}{60}\times\frac{\pi}{180}\right) = 2.3\times10^{-3}$。

1[m]先で2.3[mm]のずれに相当。

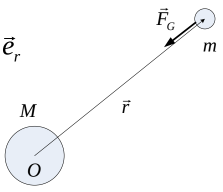
火星の視角は約9分。

朝永振一郎
「物理学とは何だろうか(上)」
岩波新書 85 (1979) など。

万有引力

- 中心力で、距離の2乗に反比例する力

$$\vec{F}_G = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r$$

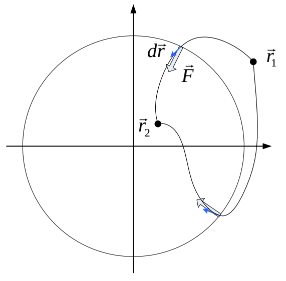


万有引力は「保存力」 ～rのみの関数である中心力

$\vec{F} = f_r(r)\vec{e}_r$
$d\vec{r} = dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta$ より

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} f_r(r)\,dr$$

（r_1、r_2 は $\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$ の r 成分）
で、1次元の場合と同じ。

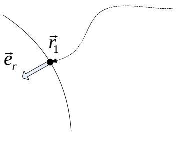


万有引力の位置エネルギー

- 基準の位置は「無限遠」に取る

$$U(\vec{r}_1) = -W_{\infty\to\vec{r}_1} = W_{\vec{r}_1\to\infty} = \int_{r_1}^{\infty} -G\frac{Mm}{r^2}dr = \left[G\frac{Mm}{r}\right]_{r_1}^{\infty} = -G\frac{Mm}{r_1}$$

$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\vec{e}_r$$

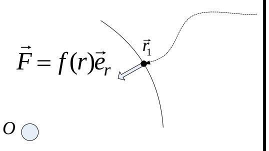


参考：中心力ポテンシャルから力

$$U(\vec{r}_1) = -W_{\vec{r}_0\to\vec{r}_1} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} f(r)\vec{e}_r\cdot d\vec{r} = -\int_{r_0}^{r_1} f(r)dr$$

エネルギーの基点

$$\vec{F} = f(r)\vec{e}_r$$



このとき U は中心からの距離 r のみで決まる。

$$U(r_1) = -\int_{r_0}^{r_1} f(r)dr \Leftrightarrow f(r) = -\frac{dU}{dr}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}(r) = -\frac{dU}{dr}\vec{e}_r$$

ケプラーの法則と 運動の法則・万有引力の法則

- Kepler +運動の法則→万有引力の法則
  - 指定教科書 p.31～ の記述
- 万有引力の法則+運動の法則→Kepler
  - 瀬戸 悟「ケプラーの法則と万有引力」
    http://www.ishikawa-nct.ac.jp/lab/E/seto/www/files/Kepler.pdf
    (2012-07-09 閲覧) …などを参照してみてください。

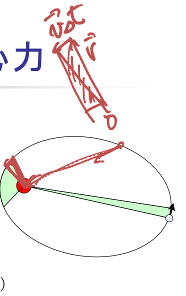
K第二法則←→中心力

面積 ΔS は、短時間の極限を取れば

$$\Delta S = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\,\Delta t\right| = \frac{\Delta t}{2m}\left|\vec{r}\times\vec{p}\right| = \frac{\Delta t}{2m}\left|\vec{L}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\left|\vec{L}\right|}{2m}$$

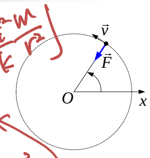
中心力なので角運動量は保存する（不変である）
から、面積速度は一定となる。



円+K第三→万有引力

楕円ではちょっと難しいので円運動で考える。 $\frac{4\pi^2}{k}\frac{m}{r^2}$

いま円運動の速さをvとすると、



地球に向かう向心力: $f_r = mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mr\omega^2$

円運動の周期: $T = \frac{2\pi}{\omega}$ $T^2 = \frac{4\pi^2}{\omega^2} = kr^3$

ケプラーの第三法則 : $T^2 = kr^3$。 $\omega^2 = \frac{4\pi^2}{kr^3}$

以上を連立させてT、~~v~~ ωを消去すると $f_r = \frac{4\pi^2}{k}\cdot\frac{m}{r^2}$が得られる。

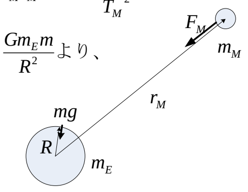
万有引力と地上の重力

万有引力の式より $F_M = \frac{Gm_E m_M}{{r_M}^2}$

一方円運動の向心力から $F_M = m_M r_M \omega^2 = \frac{4\pi^2 m_M r_M}{{T_M}^2}$

$\Rightarrow Gm_E = \frac{4\pi^2 {r_M}^3}{{T_M}^2}$、地上での $mg = \frac{Gm_E m}{R^2}$より、

$g = \frac{4\pi^2 {r_M}^3}{{T_M}^2 R^2}$



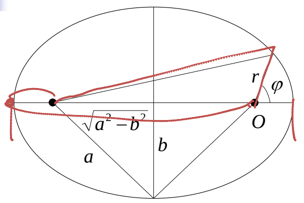
ちょっと計算

$$g = \frac{4\pi^2 {r_M}^3}{{T_M}^2 R^2} = \frac{4\pi^2\times\left(38\times10^8[\mathrm{m}]\right)^3}{\left(27.3\times86400[\mathrm{s}]\right)^2\times\left(6.4\times10^6[\mathrm{m}]\right)^2}$$
$$\sim 9.5[\mathrm{m/s}]$$

(3回目の課題1~3も思い出してみましょう)

楕円の極座標表示

$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}=1$



$e \equiv \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

$$r + \sqrt{(r\sin\varphi)^2 + \left(2\sqrt{a^2-b^2} + r\cos\varphi\right)^2} = 2a$$
$$\Rightarrow \frac{l}{r} = 1 + e\cos\varphi \quad \left(\text{ただし } l \equiv \frac{b^2}{a}\right)$$

全 Kepler→万有引力

運動方程式の極座標r成分 :

$$m\left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} = F_r$$

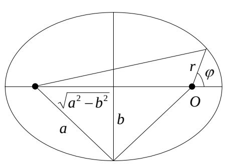
第二法則より

$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt} = S \text{ (一定)}$$

これをF_rの式に代入して整理し、楕円の式

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\varphi$$

と連立させると$F_r \propto -\frac{m}{r^2}$が導ける。



万有引力→K第一

万有引力の位置エネルギーは$U = -G\frac{Mm}{r}$。

力学的エネルギー保存則は

$$\frac{1}{2}m\left\{{v_r}^2 + {v_\theta}^2\right\} - G\frac{Mm}{r}$$
$$= \frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\} - G\frac{Mm}{r} = E \text{ (一定)}$$

角運動量保存則は

$$mr\left(r\frac{d\theta}{dt}\right) = L \text{ (一定)}$$

これを連立させることによって、$r(\theta)$が得られる。

期末試験について

- 共通問題
  - 5択マークシート問題×8問
- 別問題
  - 大問・枝問→1 (2), 2(5), 3(7), 4(5), 5(6) 、枝問計25。
  - B4 2 枚両面、直接記入式。
  - 計算用紙1枚配布。集めますが採点対象にはしません。
- 注意
  - 関数電卓を忘れないこと、使い方に習熟しておくこと。
  - 前の枝問が解けなければ後も解けない、という構成にはなっていません。まず全体を見て、簡単なもの・時間のかからないものからやってください。