物理学 I（力学）14 回目：万有引力＋期末試験について

中野武雄
2012年7月10日

今日の内容

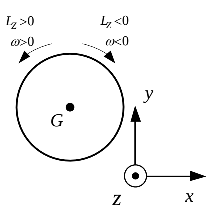
- 前回のおさらい：剛体の運動の具体例
  - 実体振り子
  - 斜面を転がり降りる運動
- 万有引力
- 質問の多かった共通問題集問題の解説

補遺：平面運動のトルク方程式の正負

- 普通に xy 軸を取ると、z 軸は裏から表
- 反時計回りだと重心回りの角運動量の z 成分 $L_z>0$、よって $L_z=I\omega$ より $\omega>0$ と考えるのが通常。

→ 反時計回りに回転を速めるトルクは正。

- 時計回りはいずれも負。

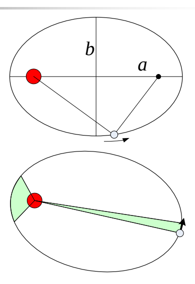


(...まあ自分で正負を把握していれば ok、ではある)

万有引力

ケプラーの法則：観測事実

- 第1法則：
  惑星の軌道は、太陽を1つの焦点とする楕円である。
- 第2法則：
  惑星が太陽の周囲に描く面積速度は一定である。
- 第3法則：
  惑星の公転周期の2乗は軌道の長半径の3乗に比例する



$$T^2 = ka^3$$

余談：ケプラーの法則の発見

- ケプラーは、チコ・ブラーエによる観測データ（16世紀後半～17世紀前半）をもとに、火星の惑星軌道を計算していた。
- 当初は惑星軌道を円、太陽の位置は中心からずれたもの、と考えたが、ブラーエのデータとの間に8分（=8/60度）のずれが生じ、これを棄却した。
- 結果、楕円軌道の法則に行き着いた。

$$\sin\left(\frac{8}{60}\times\frac{\pi}{180}\right)=2.3\times10^{-3}。$$

1[m]先で2.3[mm]のずれに相当。

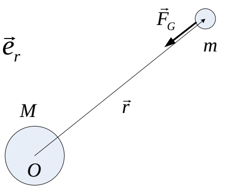
火星の視角は約9分。

朝永振一郎
「物理学とは何だろうか(上)」
岩波新書 85 (1979) など。

万有引力

- 中心力で、距離の2乗に反比例する力

$$\vec{F}_G = -\frac{GMm}{r^2}\vec{e}_r$$



万有引力は「保存力」 ～rのみの関数である中心力

$\vec{F} = f_r(r)\vec{e}_r$

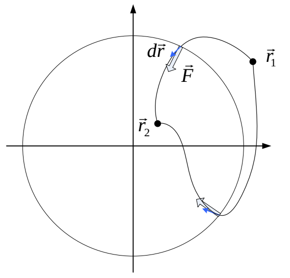
$d\vec{r} = dr\,\vec{e}_r + rd\theta\,\vec{e}_\theta$ より

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} f_r(r)\,dr$$

（r_1、r_2は$\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$のr成分）

で、1次元の場合と同じ。

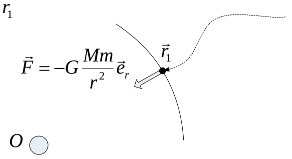


万有引力の位置エネルギー

- 基準の位置は「無限遠」に取る

$$U(\vec{r}_1) = -W_{\infty\to\vec{r}_1} = W_{\vec{r}_1\to\infty} = \int_{r_1}^{\infty} -G\frac{Mm}{r^2}dr$$

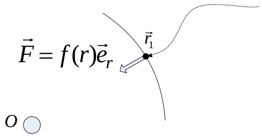
$$= \left[G\frac{Mm}{r}\right]_{r_1}^{\infty} = -G\frac{Mm}{r_1}$$



参考：中心力ポテンシャルから力

$$U(\vec{r}_1) = -W_{\vec{r}_0\to\vec{r}_1} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} f(r)\vec{e}_r\cdot d\vec{r}$$

$$= -\int_{r_0}^{r_1} f(r)dr$$



このときUは中心からの距離rのみで決まる。

$$U(r_1) = -\int_{r_0}^{r_1} f(r)dr \Leftrightarrow f(r) = -\frac{dU}{dr}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}(r) = -\frac{dU}{dr}\vec{e}_r$$

ケプラーの法則と 運動の法則・万有引力の法則

- Kepler +運動の法則→万有引力の法則
  - 指定教科書 p.31～ の記述
- 万有引力の法則+運動の法則→Kepler
  - 瀬戸 悟「ケプラーの法則と万有引力」 http://www.ishikawa-nct.ac.jp/lab/E/seto/www/files/Kepler.pdf (2012-07-09 閲覧) …などを参照してみてください。

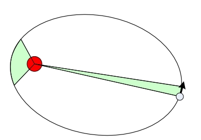
K第二法則←→中心力

面積ΔSは、短時間の極限を取れば

$$\Delta S = \frac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\,\Delta t\right| = \frac{\Delta t}{2m}\left|\vec{r}\times\vec{p}\right| = \frac{\Delta t}{2m}\left|\vec{L}\right|$$

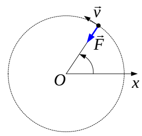
$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\left|\vec{L}\right|}{2m}$$

中心力なので角運動量は保存する（不変である）から、面積速度は一定となる。



円+K第三→万有引力

楕円ではちょっと難しいので円運動で考える。
いま円運動の速さをvとすると、



地球に向かう向心力: $f_r = mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mr\omega^2$

円運動の周期: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

ケプラーの第三法則： $T^2 = kr^3$。

以上を連立させてT、vを消去すると $f_r = \frac{4\pi^2}{k}\cdot\frac{m}{r^2}$ が得られる。

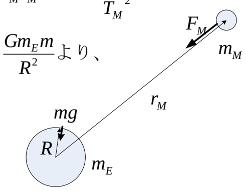
万有引力と地上の重力

万有引力の式より $F_M = \frac{Gm_E m_M}{r_M{}^2}$

一方円運動の向心力から $F_M = m_M r_M \omega^2 = \frac{4\pi^2 m_M r_M}{T_M{}^2}$

$\Rightarrow Gm_E = \frac{4\pi^2 r_M{}^3}{T_M{}^2}$、地上での $mg = \frac{Gm_E m}{R^2}$ より、

$g = \frac{4\pi^2 r_M{}^3}{T_M{}^2 R^2}$

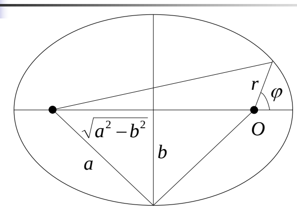


ちょっと計算

$$g = \frac{4\pi^2 r_M{}^3}{T_M{}^2 R^2} = \frac{4\pi^2 \times (38\times10^8[\mathrm{m}])^3}{(27.3\times86400[\mathrm{s}])^2\times(6.4\times10^6[\mathrm{m}])^2}$$
$$\sim 9.5[\mathrm{m/s}]$$

（3回目の課題1～3も思い出してみましょう）

楕円の極座標表示

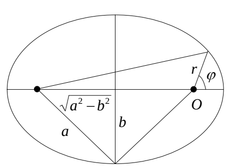


$$e \equiv \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

$$r + \sqrt{(r\sin\varphi)^2 + \left(2\sqrt{a^2-b^2} + r\cos\varphi\right)^2} = 2a$$
$$\Rightarrow \frac{l}{r} = 1 + e\cos\varphi \quad \left(ただし\ l \equiv \frac{b^2}{a}\right)$$

全 Kepler→万有引力

運動方程式の極座標r成分：
$$m\left\{\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\} = F_r$$
第二法則より
$$\frac{1}{2}r^2\frac{d\varphi}{dt} = S \text{（一定）}$$
これをF_rの式に代入して整理し、楕円の式
$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\varphi$$
と連立させると$F_r \propto -\frac{m}{r^2}$が導ける。



万有引力→K第一

万有引力の位置エネルギーは$U = -G\frac{Mm}{r}$。

力学的エネルギー保存則は
$$\frac{1}{2}m\left\{v_r{}^2 + v_\theta{}^2\right\} - G\frac{Mm}{r}$$
$$= \frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right\} - G\frac{Mm}{r} = E \text{（一定）}$$
角運動量保存則は
$$mr\left(r\frac{d\theta}{dt}\right) = L \text{（一定）}$$
これを連立させることによって、$r(\theta)$が得られる。