

van der Pauw 法による Hall 測定データの評価について

中野武雄

1995 年 4 月 7 日

概要

van der Pauw 法によって測定したデータから、シート抵抗 (Ω/\square) とホール係数 (シート単位) (C/m^2) を計算する方法について記述する。それぞれの誤差を導出する方法についても述べる。

1 測定方法

図 1 のようなサンプルを用いる。測定する値のうち、解析に必要なのは、試料の 4 端のうちの 2 端に流す電流と、そのとき他の 2 端から得られる電圧、および電流印加時に電磁石に流している電流の 3 つである。この 3 つの組み合わせを、接続を変えながら測定して行く。なお、この図 1 における磁場 B の向きは、電磁石に流した電流 i_{mag} が正のときのものとする。

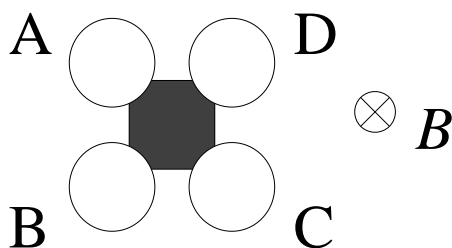


図 1: van der Pauw 法測定試料

いま A から B の向きに流した電流を I_{AB} 、C から測った D の電圧を V_{DC} のように表わすことにする。このとき、測定の組み合わせは以下の 6 通りであり、これは後藤・久保作製のスイッチボックスの切り替えに対応している。

- 1 I_{AB} V_{DC}
- 2 I_{BC} V_{AD}
- 3 I_{CD} V_{BA}
- 4 I_{DA} V_{CB}
- 5 I_{AC} V_{BD}
- 6 I_{BD} V_{CA}

各々の接続において、試料に流す電流を反転して 2 通りについて測定する。この $6 \times 2 = 12$ 通りの測定を、 $i_b = 0, +5, -5, 0[A]$ の 4 つの電磁石電流について行なう。電磁石の磁場 B と励磁電流 i_{mag} との関係は、一般にヒステリシスループとなる。このため、励磁電流を設定するとき、

電流を大きくして行く方向で合わせるか、小さくして行く方向で合わせるかによって、磁場の強度が変わってしまう。現在のところは、励磁電流値の“絶対値を大きくする方向”で合わせるようにする。

一回ごとの V_{∞} の値の取得は、以下のような手順で行う。

1. アドバンテスト製の定流定圧電源 (TR6143) を見て、試料電流が流れていないことを確認し、スイッチボックスのスイッチを切り替える
2. HP 製デジボル (HP 34401A) の NULL をいったんクリアし、もう一度 NULL 設定をする (液晶画面に “MATH” が出ているのが NULL 設定されている状態) 。
3. TR6143 の設定電流値を +20[mA] にする。
4. 電磁石の電流をチェックし、シートに記入する。
5. 試料に流すように設定した電流値をシートに記入する。
6. TR6143 の OPERATE ボタンを押し、電流を流す。
7. 電流印加後、3 秒程度待つて HP 34401A の電圧値を読み、速やかにシートに記入する。続けて再び電圧値を読み、シートに電圧値を記入する。
8. TR6143 の電圧表示を読み、OPERATE ボタンを押して電流を止める。TR6143 の電圧値を読めた桁までシートに記入する。
9. TR6143 の設定電流値を -20[mA] にし、4 から 8 までの手順を繰り返す。
10. 終わり。

測定の 1 時間ほど前に、各種計測器と電磁石励磁用電源のメインスイッチを入れ、ウォームアップをしておく。また、測定場所付近にあるエアコンを『冷暖自動』モードで温度 23 にセットしておく。

2 シート抵抗とホール係数の計算

2.1 $R_{\infty, \square}$ の決定

試料電流 I_{AB} および 試料電圧 V_{DC} から、 $R_{AB,DC}$ を以下の式 1 のように定義する。

$$R_{AB,DC} = \overline{(V_{DC}/I_{AB})} \quad (1)$$

現在のところ、 V_{DC} は I_{AB} が正のときに 2 回、負のときに 2 回測定しているから、合計 4 つの V_{DC}/I_{AB} の値を平均したものを $R_{AB,DC}$ とみなす。¹。

¹ただし、多数の V_{DC} を測定した場合には、測定時系列にそった傾向がないかどうかを注意する必要がある

2.2 磁場の計算

励磁電流 i_{mag} を完全に $\pm 5[A]$ に合わせることは難しいので、 i_{mag} から磁場 B が計算で求められるようにする必要がある。久保・後藤により、電磁石の電流と磁場の関係はすでに測定されている。現在用いている試料ホルダを磁極間に挟んだ状態で、励磁電流 $\pm 5[A]$ 付近における電磁石の磁場 B と電流 i_{mag} との関係を以下に与える。

励磁電流が $5[A]$ のときは、励磁電流が増えて行く方向で合わせることになる。このとき、 i_{mag} と B の関係は、次の式 2 で与えられる。

$$i_{mag} = a_u B + b_u B^3 + c_u B^5 + d_u \quad (2)$$

ただしここで $a_u \sim d_u$ は、久保・後藤によって測定から最小二乗法で決定されたパラメータであり、それぞれ

$$\begin{aligned} a_u &= 9.861012 \\ b_u &= 4.294365 \times 10^{-3} \\ c_u &= 1.790570 \times 10^{-5} \\ d_u &= -1.600060 \end{aligned}$$

と与えられている。

同様に励磁電流が $-5[A]$ のときは、 $i_{mag}-B$ の関係は、

$$i_{mag} = a_d B + b_d B^3 + c_d B^5 + d_d \quad (3)$$

で与えられ、各係数は

$$\begin{aligned} a_d &= 5.961734 \\ b_d &= 3.343184 \\ c_d &= 3.051448 \times 10^{-3} \\ d_d &= 9.169160 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

となっている。これらの式を用いて、電流値 i_{mag} から 2 分法を用いて磁場 B を求めている。精度は 5 桁としている。

2.3 シート抵抗

文献 [1] によれば、シート抵抗 ρ_S は式 4 で与えられる。

$$\rho_S = \frac{\pi}{\ln 2} \frac{R_{AB,DC} + R_{BC,AD}}{2} f(x) \quad (4)$$

ここで x は以下のように定義される量であり、従って $0 < x \leq 1$ の間の値となる。

$$x = \min \left(\frac{R_{AB,DC}}{R_{BC,AD}}, \frac{R_{BC,AD}}{R_{AB,DC}} \right) \quad (5)$$

また、 $f(x)$ は次の超越方程式を解いて得られる解である。

$$\frac{\ln 2}{f} = \ln \left\{ 2 \cosh \left(\frac{1-x \ln 2}{1+x f} \right) \right\} \quad (6)$$

実際には、式 5 より得られた x より、2 分法のアルゴリズムを用いて式 6 を解き、 f を求めている。

以上の手続きを $R_{AB,DC} - R_{BC,AD}$ のペアと、 $R_{CD,BA} - R_{DA,CB}$ のペアとに対してそれぞれ行い、得られた 2 つの ρ_S の値を平均して試料のシート抵抗とする。このようにして、各磁場強度におけるシート抵抗をそれぞれ求めることができる。

2.4 ホール係数

薄膜の“シート”ホール係数 $R_S[\text{m}^2/\text{C}]$ は、次の式 7 によって決まる [1]。

$$R_S = \frac{\Delta R_{AC,BD}}{B} \quad (7)$$

ここで $\Delta R_{AC,BD}$ は、次の式で定義される量である。

$$\Delta R_{AC,BD} = R_{AC,BD}|_{B=B} - R_{AC,BD}|_{B=0}$$

このときの磁場の向きに関しては、図 1 中の向きを正とする。

実験では、まず $i_{mag} = 0, +5, -5, 0[\text{A}]$ の各点で $R_{AC,BD}$ を測定する。またそれぞれの i_{mag} における磁場 B の値を 2.2 の方法で決定する。この 4 つの $(R_{AC,BD}, B)$ データセットより、最少二乗法で傾き $\Delta R_{AC,BD}/B$ を求める。

磁場 B_i における $R_{AC,BD}$ を R_i ($i = 1 \dots 4$) と表わすことにすると、この傾きを求める表式は以下ようになる [2]。

$$\frac{\Delta R_{AC,BD}}{B} = \frac{4 \sum_i B_i R_i - \sum_i B_i \sum_i R_i}{4 \sum_i B_i^2 - \left(\sum_i B_i \right)^2} \quad (8)$$

同様に $\Delta R_{BD,CA}/B$ を求め、2 つの値の平均値を R_S とする。

3 各値の誤差の導出

3.1 $R_{\infty, \square}$ の誤差

現在は $I > 0$ で 2 点、 $I < 0$ で 2 点、電圧を測定している。これらをそれぞれ R_1^+ 、 R_2^+ 、 R_1^- 、 R_2^- とおくことにする。まず R^\pm の誤差は、次の式 9 で与えられるものとする。

$$\delta R^\pm = \max \left(\text{stdev}(R_1^\pm, R_2^\pm), \left(\frac{\delta V_m}{V_{\square}} + \frac{\delta I_s}{I_{\infty}} \right) R^\pm \right) \quad (9)$$

ここで stdev は標準偏差の意味である。 δV_m 、 δI_s はそれぞれ HP 34401A、TR6143 の機器誤差で、現在は $V_m = 0.5[\mu\text{V}]$ 、 $I_s = 0.5[\mu\text{A}]$ としている。これらはいずれも最小表示桁の 1/2 である。

$\delta R_{\infty, \square}$ は、この δR^+ と δR^- を用いて、以下の式で決定している。

$$\delta R_{\infty, \square} = \max \left(\text{stdev}(R^+, R^-), \frac{\delta R^+ + \delta R^-}{2} \right)$$

ただし、 $R_{\infty, \square} \approx R^+ \approx R^-$ を仮定している。

3.2 シート抵抗の誤差

$R_{AB,DC}$ と $R_{BC,AD}$ から求まるシート抵抗 $\rho_S^{\text{pivot}-B}$ の誤差を、式 4 と誤差伝播の法則より求めると、 $R_{AB,DC} > R_{BC,AD}$ の場合において

$$\begin{aligned} \delta \rho_S^{\text{pivot}-B} &= \frac{\pi}{\ln 2} f \left(\frac{\delta R_{AB,DC} + \delta R_{BC,AD}}{2} \right) \\ &+ \frac{\pi}{\ln 2} \left(\frac{R_{AB,DC} + R_{BC,AD}}{2} \right) f' \left(\frac{\delta R_{BC,AD}}{R_{AB,DC}} + \frac{R_{BC,AD} \delta R_{AB,DC}}{R_{AB,DC}^2} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

となる。 $R_{AB,DC} < R_{BC,AD}$ の場合には、上式中の $R_{AB,DC}$ と $R_{BC,AD}$ とを入れ替える。またここで f' は、式 6 の両辺を x で微分して整理することによって、

$$f' = f \frac{\frac{2}{(1+x)^2} \tanh \left\{ \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \frac{\ln 2}{f} \right\}}{1 - \tanh \left\{ \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \frac{\ln 2}{f} \right\}}$$

で与えられる。

同様に $\delta\rho_S^{pivot-D}$ も求め、最終的に $\delta\rho_S$ を次の式から求める。

$$\delta\rho_S = \max \left(\frac{\delta\rho_S^{pivot-B} + \delta\rho_S^{pivot-D}}{2}, \text{stdev} \left(\rho_S^{pivot-B}, \rho_S^{pivot-D} \right) \right)$$

3.3 ホール係数

$\Delta R_{AC,BD}/B$ と $\Delta R_{BD,CA}/B$ とを最小二乗法で求めた際の傾きの誤差を、それぞれ $\delta(\Delta R_{AC,BD}/B)$ および $\delta(\Delta R_{BD,CA}/B)$ とする。具体的な表式は以下のようなになる [3]。

$$\delta \left(\frac{\Delta R}{B} \right) = \frac{\sum_i (\delta R)_i^{-2}}{\sum_i (\delta R)_i^{-2} \sum_i B_i^2 (\delta R)_i^{-2} - \left(\sum_i B_i (\delta R)_i^{-2} \right)^2} \quad (11)$$

これらから、

$$\delta R_S = \max \left(\frac{1}{2} \left\{ \delta \left(\frac{\Delta R_{AC,BD}}{B} \right) + \delta \left(\frac{\Delta R_{BD,CA}}{B} \right) \right\}, \text{stdev} \left(\frac{\Delta R_{AC,BD}}{B}, \frac{\Delta R_{BD,CA}}{B} \right) \right)$$

で誤差を定める。

参考文献

- [1] 金原 稜, 藤原英夫: 薄膜, 裳華房 (1979) p.255
- [2] 1993-1994 計数実験第一テキスト p.7
- [3] 中野武雄: 『最小二乗法による線形モデルのパラメータ決定について』馬場研輪講資料 1995-09-14