

# van der Pauw 法による Hall 測定データの評価について

中野武雄

1995 年 4 月 7 日

## 概要

van der Pauw 法によって測定したデータから、シート抵抗 ( $\Omega/\square$ ) とホール係数 (シート単位) ( $C/m^2$ ) を計算する方法について記述する。それぞれの誤差を導出する方法についても述べる。

## 1 測定方法

図 1 のようなサンプルを用いる。測定する値のうち、解析に必要なのは、試料の 4 端のうち 2 端に流す電流と、そのとき他の 2 端から得られる電圧、および電流印加時に電磁石に流している電流の 3 つである。この 3 つの組み合わせを、接続を変えながら測定して行く。なお、この図 1 における磁場  $B$  の向きは、電磁石に流した電流  $i_{mag}$  が正のときのものとする。

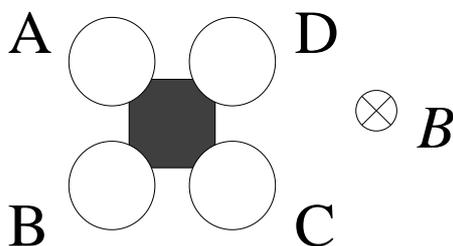


図 1: van der Pauw 法測定試料

いま A から B の向きに流した電流を  $I_{AB}$ 、C から測った D の電圧を  $V_{DC}$  のように表わすことにする。このとき、測定の組み合わせは以下の 6 通りであり、これは後藤・久保作製のスイッチボックスの切り替えに対応している。

- 1  $I_{AB}$   $V_{DC}$
- 2  $I_{BC}$   $V_{AD}$
- 3  $I_{CD}$   $V_{BA}$
- 4  $I_{DA}$   $V_{CB}$
- 5  $I_{AC}$   $V_{BD}$
- 6  $I_{BD}$   $V_{CA}$

各々の接続において、試料に流す電流を反転して 2 通りについて測定する。この  $6 \times 2 = 12$  通りの測定を、 $i_b = 0, +5, -5, 0[A]$  の 4 つの電磁石電流について行なう。電磁石の磁場  $B$  と励磁電流  $i_{mag}$  との関係は、一般にヒステリシスループとなる。このため、励磁電流を設定するとき、

電流を大きくして行く方向で合わせるか、小さくして行く方向で合わせるかによって、磁場の強度が変わってしまう。現在のところは、励磁電流値の“絶対値を大きくする方向”で合わせるようにする。

一回ごとの  $V_{\infty}$  の値の取得は、以下のような手順で行う。

1. アドバンテスト製の定流定圧電源 ( TR6143 ) を見て、試料電流が流れていないことを確認し、スイッチボックスのスイッチを切り替える
2. HP 製デジボル ( HP 34401A ) の NULL をいったんクリアし、もう一度 NULL 設定をする ( 液晶画面に “MATH” が出ているのが NULL 設定されている状態 ) 。
3. TR6143 の設定電流値を +20[mA] にする。
4. 電磁石の電流をチェックし、シートに記入する。
5. 試料に流すように設定した電流値をシートに記入する。
6. TR6143 の OPERATE ボタンを押し、電流を流す。
7. 電流印加後、3 秒程度待つて HP 34401A の電圧値を読み、速やかにシートに記入する。続けて再び電圧値を読み、シートに電圧値を記入する。
8. TR6143 の電圧表示を読み、OPERATE ボタンを押し電流を止める。TR6143 の電圧値を読めた桁までシートに記入する。
9. TR6143 の設定電流値を -20[mA] にし、4 から 8 までの手順を繰り返す。
10. 終わり。

測定の 1 時間ほど前に、各種計測器と電磁石励磁用電源のメインスイッチを入れ、ウォームアップをしておく。また、測定場所付近にあるエアコンを『冷暖自動』モードで温度 23 にセットしておく。

## 2 シート抵抗とホール係数の計算

### 2.1 $R_{\infty, \square}$ の決定

試料電流  $I_{AB}$  および 試料電圧  $V_{DC}$  から、 $R_{AB,DC}$  を以下の式 1 のように定義する。

$$R_{AB,DC} = \overline{(V_{DC}/I_{AB})} \quad (1)$$

現在のところ、 $V_{DC}$  は  $I_{AB}$  が正のときに 2 回、負のときに 2 回測定しているから、合計 4 つの  $V_{DC}/I_{AB}$  の値を平均したものを  $R_{AB,DC}$  とみなす。<sup>1</sup>。

<sup>1</sup>ただし、多数の  $V_{DC}$  を測定した場合には、測定時系列にそった傾向がないかどうかを注意する必要がある

## 2.2 磁場の計算

励磁電流  $i_{mag}$  を完全に  $\pm 5[A]$  に合わせることは難しいので、 $i_{mag}$  から磁場  $B$  が計算で求められるようにする必要がある。久保・後藤により、電磁石の電流と磁場の関係はすでに測定されている。現在用いている試料ホルダを磁極間に挟んだ状態で、励磁電流  $\pm 5[A]$  付近における電磁石の磁場  $B$  と電流  $i_{mag}$  との関係を以下に与える。

励磁電流が  $5[A]$  のときは、励磁電流が増えて行く方向で合わせることになる。このとき、 $i_{mag}$  と  $B$  の関係は、次の式 2 で与えられる。

$$i_{mag} = a_u B + b_u B^3 + c_u B^5 + d_u \quad (2)$$

ただしここで  $a_u \sim d_u$  は、久保・後藤によって測定から最小二乗法で決定されたパラメータであり、それぞれ

$$\begin{aligned} a_u &= 9.861012 \\ b_u &= 4.294365 \times 10^{-3} \\ c_u &= 1.790570 \times 10^{-5} \\ d_u &= -1.600060 \end{aligned}$$

と与えられている。

同様に励磁電流が  $-5[A]$  のときは、 $i_{mag}-B$  の関係は、

$$i_{mag} = a_d B + b_d B^3 + c_d B^5 + d_d \quad (3)$$

で与えられ、各係数は

$$\begin{aligned} a_d &= 5.961734 \\ b_d &= 3.343184 \\ c_d &= 3.051448 \times 10^{-3} \\ d_d &= 9.169160 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

となっている。これらの式を用いて、電流値  $i_{mag}$  から 2 分法を用いて磁場  $B$  を求めている。精度は 5 桁としている。

## 2.3 シート抵抗

文献 [1] によれば、シート抵抗  $\rho_S$  は式 4 で与えられる。

$$\rho_S = \frac{\pi}{\ln 2} \frac{R_{AB,DC} + R_{BC,AD}}{2} f(x) \quad (4)$$

ここで  $x$  は以下のように定義される量であり、従って  $0 < x \leq 1$  の間の値となる。

$$x = \min \left( \frac{R_{AB,DC}}{R_{BC,AD}}, \frac{R_{BC,AD}}{R_{AB,DC}} \right) \quad (5)$$

また、 $f(x)$  は次の超越方程式を解いて得られる解である。

$$\frac{\ln 2}{f} = \ln \left\{ 2 \cosh \left( \frac{1-x \ln 2}{1+x f} \right) \right\} \quad (6)$$

実際には、式 5 より得られた  $x$  より、2 分法のアルゴリズムを用いて式 6 を解き、 $f$  を求めている。

以上の手続きを  $R_{AB,DC} - R_{BC,AD}$  のペアと、 $R_{CD,BA} - R_{DA,CB}$  のペアとに対してそれぞれ行い、得られた 2 つの  $\rho_S$  の値を平均して試料のシート抵抗とする。このようにして、各磁場強度におけるシート抵抗をそれぞれ求めることができる。

## 2.4 ホール係数

薄膜の“シート”ホール係数  $R_S[\text{m}^2/\text{C}]$  は、次の式 7 によって決まる [1]。

$$R_S = \frac{\Delta R_{AC,BD}}{B} \quad (7)$$

ここで  $\Delta R_{AC,BD}$  は、次の式で定義される量である。

$$\Delta R_{AC,BD} = R_{AC,BD}|_{B=B} - R_{AC,BD}|_{B=0}$$

このときの磁場の向きに関しては、図 1 中の向きを正とする。

実験では、まず  $i_{mag} = 0, +5, -5, 0[\text{A}]$  の各点で  $R_{AC,BD}$  を測定する。またそれぞれの  $i_{mag}$  における磁場  $B$  の値を 2.2 の方法で決定する。この 4 つの  $(R_{AC,BD}, B)$  データセットより、最少二乗法で傾き  $\Delta R_{AC,BD}/B$  を求める。

磁場  $B_i$  における  $R_{AC,BD}$  を  $R_i$  ( $i = 1 \dots 4$ ) と表わすことにすると、この傾きを求める表式は以下ようになる [2]。

$$\frac{\Delta R_{AC,BD}}{B} = \frac{4 \sum_i B_i R_i - \sum_i B_i \sum_i R_i}{4 \sum_i B_i^2 - \left( \sum_i B_i \right)^2} \quad (8)$$

同様に  $\Delta R_{BD,CA}/B$  を求め、2 つの値の平均値を  $R_S$  とする。

## 3 各値の誤差の導出

### 3.1 $R_{\infty, \square}$ の誤差

現在は  $I > 0$  で 2 点、 $I < 0$  で 2 点、電圧を測定している。これらをそれぞれ  $R_1^+$ 、 $R_2^+$ 、 $R_1^-$ 、 $R_2^-$  とおくことにする。まず  $R^\pm$  の誤差は、次の式 9 で与えられるものとする。

$$\delta R^\pm = \max \left( \text{stdev}(R_1^\pm, R_2^\pm), \left( \frac{\delta V_m}{V_{\square}} + \frac{\delta I_s}{I_{\infty}} \right) R^\pm \right) \quad (9)$$

ここで  $\text{stdev}$  は標準偏差の意味である。 $\delta V_m$ 、 $\delta I_s$  はそれぞれ HP 34401A、TR6143 の機器誤差で、現在は  $V_m = 0.5[\mu\text{V}]$ 、 $I_s = 0.5[\mu\text{A}]$  としている。これらはいずれも最小表示桁の 1/2 である。

$\delta R_{\infty, \square}$  は、この  $\delta R^+$  と  $\delta R^-$  を用いて、以下の式で決定している。

$$\delta R_{\infty, \square} = \max \left( \text{stdev}(R^+, R^-), \frac{\delta R^+ + \delta R^-}{2} \right)$$

ただし、 $R_{\infty, \square} \approx R^+ \approx R^-$  を仮定している。

### 3.2 シート抵抗の誤差

$R_{AB,DC}$  と  $R_{BC,AD}$  から求まるシート抵抗  $\rho_S^{\text{pivot}-B}$  の誤差を、式 4 と誤差伝播の法則より求めると、 $R_{AB,DC} > R_{BC,AD}$  の場合において

$$\begin{aligned} \delta \rho_S^{\text{pivot}-B} &= \frac{\pi}{\ln 2} f \left( \frac{\delta R_{AB,DC} + \delta R_{BC,AD}}{2} \right) \\ &+ \frac{\pi}{\ln 2} \left( \frac{R_{AB,DC} + R_{BC,AD}}{2} \right) f' \left( \frac{\delta R_{BC,AD}}{R_{AB,DC}} + \frac{R_{BC,AD} \delta R_{AB,DC}}{R_{AB,DC}^2} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

となる。 $R_{AB,DC} < R_{BC,AD}$  の場合には、上式中の  $R_{AB,DC}$  と  $R_{BC,AD}$  とを入れ替える。またここで  $f'$  は、式 6 の両辺を  $x$  で微分して整理することによって、

$$f' = f \frac{\frac{2}{(1+x)^2} \tanh \left\{ \left( \frac{1-x}{1+x} \right) \frac{\ln 2}{f} \right\}}{1 - \tanh \left\{ \left( \frac{1-x}{1+x} \right) \frac{\ln 2}{f} \right\}}$$

で与えられる。

同様に  $\delta\rho_S^{pivot-D}$  も求め、最終的に  $\delta\rho_S$  を次の式から求める。

$$\delta\rho_S = \max \left( \frac{\delta\rho_S^{pivot-B} + \delta\rho_S^{pivot-D}}{2}, \text{stdev} \left( \rho_S^{pivot-B}, \rho_S^{pivot-D} \right) \right)$$

### 3.3 ホール係数

$\Delta R_{AC,BD}/B$  と  $\Delta R_{BD,CA}/B$  とを最小二乗法で求めた際の傾きの誤差を、それぞれ  $\delta(\Delta R_{AC,BD}/B)$  および  $\delta(\Delta R_{BD,CA}/B)$  とする。具体的な表式は以下のようなになる [3]。

$$\delta \left( \frac{\Delta R}{B} \right) = \frac{\sum_i (\delta R)_i^{-2}}{\sum_i (\delta R)_i^{-2} \sum_i B_i^2 (\delta R)_i^{-2} - \left( \sum_i B_i (\delta R)_i^{-2} \right)^2} \quad (11)$$

これらから、

$$\delta R_S = \max \left( \frac{1}{2} \left\{ \delta \left( \frac{\Delta R_{AC,BD}}{B} \right) + \delta \left( \frac{\Delta R_{BD,CA}}{B} \right) \right\}, \text{stdev} \left( \frac{\Delta R_{AC,BD}}{B}, \frac{\Delta R_{BD,CA}}{B} \right) \right)$$

で誤差を定める。

## 参考文献

- [1] 金原 稜, 藤原英夫: 薄膜, 裳華房 (1979) p.255
- [2] 1993-1994 計数実験第一テキスト p.7
- [3] 中野武雄: 『最小二乗法による線形モデルのパラメータ決定について』馬場研輪講資料 1995-09-14